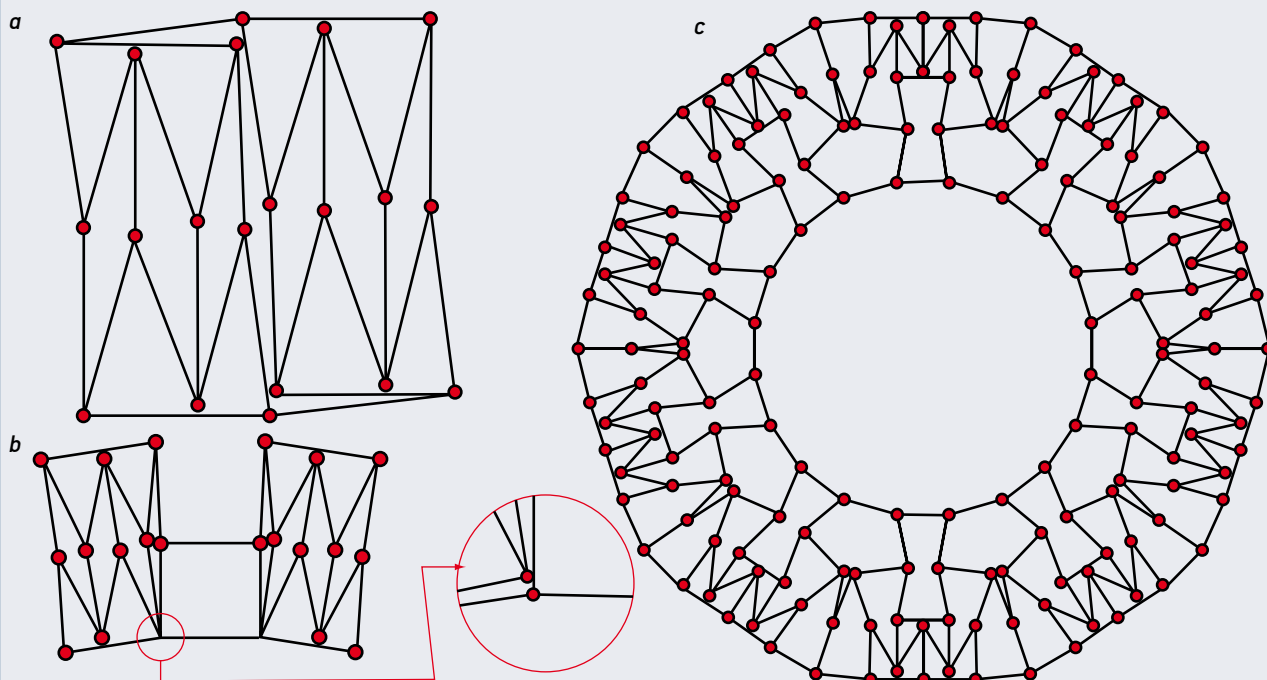


3. Graphes où les triangles sont interdits



On recherche des graphes-allumettes k -réguliers où la longueur T du plus petit circuit est différente de 3: le graphe ne doit comporter aucun triangle. Pour $k = 3$ et $T = 4$, une

solution à 20 sommets (a) a été trouvée récemment par S. Kurz et G. Mazzuocollo qui proposent aussi une méthode donnant des graphes-allumettes 3-réguliers avec $T = 4$ et un

nombre pair ≥ 20 de sommets. L'idée (b) est de remplacer le quadrilatère de la partie centrale par une série de quadrilatères formant une chaîne (un quadrilatère supplémentaire

augmente le nombre de sommets de 2). Pour le cas difficile $k = 3$ et $T = 5$ (pas de triangle, pas de quadrilatère), la solution minimale à ce jour est ce graphe à 180 sommets (c).

H. Harborth, mais on ne sait pas faire mieux pour l'instant; on recherche donc des graphes-allumettes 4-réguliers plus petits que le graphe de Harborth.

Pas de solution pour $k > 4$

Pour $k = 5$, on soupçonnait depuis longtemps qu'aucune solution n'est possible. Plusieurs preuves ont été proposées pour établir cette inexistence. Dans un premier temps, certaines comportaient des erreurs. Les preuves admises aujourd'hui sont dues à Aart Blokhuis, de l'Université d'Eindhoven, S. Kurz et R. Pinchasi. Aucune n'est assez simple pour être reproduite ici!

Remarquons que cette impossibilité ne concerne que le plan. Sur une sphère, en prenant les projections des arêtes d'un

icosaèdre [le polyèdre de Platon à 20 faces] sur la sphère dans lequel il s'inscrit, on dessine à la surface de la sphère un graphe-allumettes 5-régulier [voir l'encadré 2].

Pour $k = 6$, il n'y a pas de graphes-allumettes 6-réguliers au sens usuel, c'est-à-dire ayant un nombre fini de sommets, mais il est facile d'imaginer une solution infinie. Réfléchissez trois secondes [réponse: un pavage de triangles équilatéraux sur tout le plan].

Pour $k \geq 6$, on démontre, cette fois facilement, qu'il n'y a pas de solution. La démonstration utilise la formule d'Euler pour les graphes planaires. Celle-ci indique que pour un graphe planaire, on a toujours $S - A + F = 2$, où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de faces [c'est-à-dire de zones du plan créées par le

graphe, y compris la zone extérieure au dessin du graphe].

Voici cette démonstration. Si le graphe est k -régulier, à chaque sommet arrivent exactement k arêtes, donc $kS = 2A$. La formule d'Euler devient:

$2A/k - A + F = 2$, ou $F = 2 + (1 - 2/k)A$. Chaque zone du plan délimitée par le graphe comporte au moins trois arêtes sur son pourtour et chaque arête borde exactement deux zones. Cela signifie que $F \leq 2A/3$. On en tire $2A/3 \geq 2 + (1 - 2/k)A$ ou $0 \geq 2 + (1/3 - 2/k)A$. Or cela est impossible quand $k \geq 6$, car $(1/3 - 2/k)$ est alors positif ou nul. Cela achève notre démonstration.

Dans un graphe, la longueur de la plus courte liste d'arêtes qui se suivent et reviennent à leur point de départ se nomme taille du plus petit circuit. On note T ce

paramètre. C'est une donnée qui intéresse les mathématiciens, car les graphes ayant un T assez grand sont rares. Dans le cas du graphe de Harborth, $T = 3$ [il comporte des triangles]. Un article publié récemment par S. Kurz et Guiseppe Mazzuocollo, de l'Université de Modène, s'intéresse aux graphes-allumettes k -réguliers ayant $T > 3$ (donc plus difficiles à trouver).

On savait déjà que les graphes-unités 3-réguliers avec $T = 3$ existent si et seulement si le nombre de sommets est pair et supérieur à 8. L'article démontre que les graphes-allumettes 3-réguliers avec $T = 4$ existent si et seulement si le nombre de sommets est pair et supérieur ou égal à 20. Le graphe trouvé pour 20 sommets est étonnant et il faut le regarder de très près pour être certain que les allumettes [nécessairement excessivement fines] ne se touchent qu'à leurs extrémités [voir l'encadré 3].

En plus du travail de démonstration mené pour les graphes ayant $T = 4$, les chercheurs ont réussi à construire un graphe-allumettes

3-régulier ayant $T = 5$ [voir l'encadré 3, c]. Il a 180 sommets et est très beau. On ignore si c'est le meilleur de sa catégorie.

Une démonstration utilisant à nouveau la formule d'Euler établit que les graphes-allumettes 3-réguliers ayant $T \geq 6$ sont impossibles.

Dans leur article, les deux auteurs rendent hommage à H. Harborth qui a introduit les problèmes de graphes-allumettes en 1986. Ils précisent que « les allumettes sont les moins chers et les plus simples des objets donnant naissance à des problèmes stimulants, difficiles et ayant un véritable intérêt mathématique. »

Les variantes de ces problèmes ont donné naissance à une famille d'énigmes mathématiques susceptibles de vous occuper longuement. Erich Friedman, de l'Université Stetson en Floride, s'est par exemple intéressé aux graphes-allumettes ayant deux sortes de sommets, les uns de degré n , les autres de degré m [généralisation naturelle de la notion de graphes-allumettes k -régu-

liers]. En existe-t-il toujours ? Quels sont, pour n et m fixés, les plus simples ?

Sur la page <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1205.html>, E. Friedman tient à jour les meilleurs résultats connus [voir l'encadré 5].

Un problème NP-difficile

La difficulté à résoudre ces problèmes a une explication indirecte qui, cette fois, nous emmène au cœur de la théorie moderne du calcul. La difficulté s'explique par un résultat démontré par les Australiens Peter Eades et Nicholas Wormald : le problème de dessiner sur un plan un graphe dont toutes les arêtes ont la même longueur est « NP-difficile ». Cela signifie que si on savait faire cela efficacement [c'est-à-dire en temps polynomial en fonction du nombre d'arêtes], alors on saurait traiter efficacement une multitude d'autres problèmes dont certains sont unanimement considérés difficiles (ceux dénommés NP-complets). En clair, il ne fait pas de

4. Le problème de Paul Erdős

En 1946, Paul Erdős se demande, quand on place n points sur le plan, combien de fois au plus on peut obtenir la même distance entre deux points. La question peut se formuler plus simplement avec les graphes-allumettes, à condition d'autoriser le croisement des arêtes.

La question d'Erdős devient alors : quel est le maximum $f(n)$ d'arêtes que peut avoir un graphe-allumettes de n sommets ? Des petits dessins permettent de répondre assez facilement pour les premières valeurs de n ($n = 1, 2, \dots, 6$). En revanche, pour aller plus loin, il faut s'armer d'une grande patience et de beaucoup d'ingéniosité... ou d'un ordinateur.

La suite $f(n)$ est la suite A186705 de l'encyclopédie des suites de Neil Sloane. Erdős démontra qu'il existe deux

constantes positives c et c' telles que : $n^{1+c/\log(\log(n))} < f(n) < c'n^{3/2}$. L'exposant $3/2$ du terme de droite a depuis été amélioré, d'abord en 1,44, puis en $4/3$. Mais on n'en sait pas plus aujourd'hui, et bien sûr, pas plus que pour $a(n)$ et $b(n)$, on ne connaît de formule générale satisfaisante pour $f(n)$.

On a représenté ci-contre les meilleurs graphes-allumettes connus pour ce problème (dessins dus à C. Schade, voir le livre de P. Brass, W. Moser et J. Pach).

