

paramètre. C'est une donnée qui intéresse les mathématiciens, car les graphes ayant un T assez grand sont rares. Dans le cas du graphe de Harborth, $T = 3$ [il comporte des triangles]. Un article publié récemment par S. Kurz et Guiseppe Mazzuocollo, de l'Université de Modène, s'intéresse aux graphes-allumettes k -réguliers ayant $T > 3$ (donc plus difficiles à trouver).

On savait déjà que les graphes-unités 3-réguliers avec $T = 3$ existent si et seulement si le nombre de sommets est pair et supérieur à 8. L'article démontre que les graphes-allumettes 3-réguliers avec $T = 4$ existent si et seulement si le nombre de sommets est pair et supérieur ou égal à 20. Le graphe trouvé pour 20 sommets est étonnant et il faut le regarder de très près pour être certain que les allumettes [nécessairement excessivement fines] ne se touchent qu'à leurs extrémités [voir l'encadré 3].

En plus du travail de démonstration mené pour les graphes ayant $T = 4$, les chercheurs ont réussi à construire un graphe-allumettes

3-régulier ayant $T = 5$ [voir l'encadré 3, c]. Il a 180 sommets et est très beau. On ignore si c'est le meilleur de sa catégorie.

Une démonstration utilisant à nouveau la formule d'Euler établit que les graphes-allumettes 3-réguliers ayant $T \geq 6$ sont impossibles.

Dans leur article, les deux auteurs rendent hommage à H. Harborth qui a introduit les problèmes de graphes-allumettes en 1986. Ils précisent que « les allumettes sont les moins chers et les plus simples des objets donnant naissance à des problèmes stimulants, difficiles et ayant un véritable intérêt mathématique. »

Les variantes de ces problèmes ont donné naissance à une famille d'énigmes mathématiques susceptibles de vous occuper longuement. Erich Friedman, de l'Université Stetson en Floride, s'est par exemple intéressé aux graphes-allumettes ayant deux sortes de sommets, les uns de degré n , les autres de degré m [généralisation naturelle de la notion de graphes-allumettes k -réguliers].

En existe-t-il toujours ? Quels sont, pour n et m fixés, les plus simples ?

Sur la page <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1205.html>, E. Friedman tient à jour les meilleurs résultats connus [voir l'encadré 5].

Un problème NP-difficile

La difficulté à résoudre ces problèmes a une explication indirecte qui, cette fois, nous emmène au cœur de la théorie moderne du calcul. La difficulté s'explique par un résultat démontré par les Australiens Peter Eades et Nicholas Wormald : le problème de dessiner sur un plan un graphe dont toutes les arêtes ont la même longueur est « NP-difficile ». Cela signifie que si on savait faire cela efficacement [c'est-à-dire en temps polynomial en fonction du nombre d'arêtes], alors on saurait traiter efficacement une multitude d'autres problèmes dont certains sont unanimement considérés difficiles [ceux dénommés NP-complets]. En clair, il ne fait pas de

4. Le problème de Paul Erdős

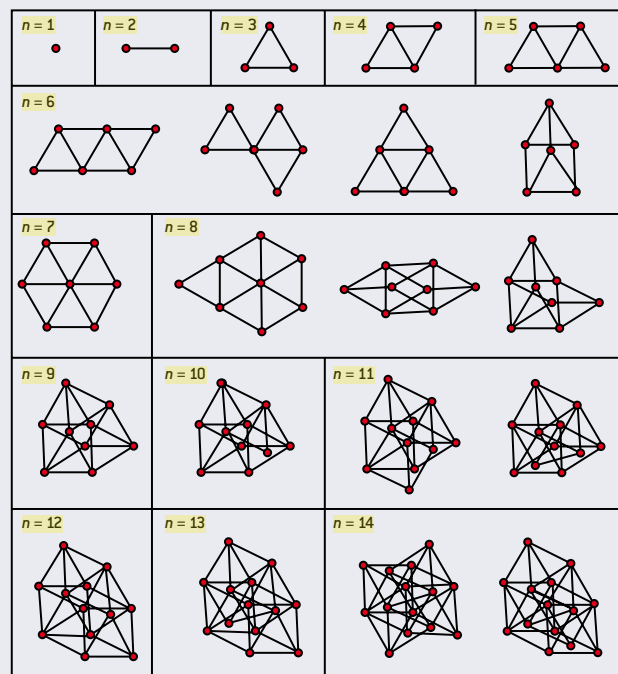
En 1946, Paul Erdős se demande, quand on place n points sur le plan, combien de fois au plus on peut obtenir la même distance entre deux points. La question peut se formuler plus simplement avec les graphes-allumettes, à condition d'autoriser le croisement des arêtes.

La question d'Erdős devient alors : quel est le maximum $f(n)$ d'arêtes que peut avoir un graphe-allumettes de n sommets ? Des petits dessins permettent de répondre assez facilement pour les premières valeurs de n ($n = 1, 2, \dots, 6$). En revanche, pour aller plus loin, il faut s'armer d'une grande patience et de beaucoup d'ingéniosité... ou d'un ordinateur.

La suite $f(n)$ est la suite A186705 de l'encyclopédie des suites de Neil Sloane. Erdős démontra qu'il existe deux

constantes positives c et c' telles que : $n^{1+c/\log(\log(n))} < f(n) < c'n^{3/2}$. L'exposant $3/2$ du terme de droite a depuis été amélioré, d'abord en 1,44, puis en $4/3$. Mais on n'en sait pas plus aujourd'hui, et bien sûr, pas plus que pour $a(n)$ et $b(n)$, on ne connaît de formule générale satisfaisante pour $f(n)$.

On a représenté ci-contre les meilleurs graphes-allumettes connus pour ce problème (dessins dus à C. Schade, voir le livre de P. Brass, W. Moser et J. Pach).



5. Les graphes de Erich Friedman

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8
1							
2							
3							

Erich Friedman s'est intéressé aux graphes-allumettes ayant uniquement des sommets de degré n ou m (n et m étant deux entiers fixés, ici $m = 1, 2, 3$ et $n = 2, 3, \dots, 8$). Nous les nomme-

rons « graphes-allumettes de type $n-m$ ». On recherche à chaque fois les solutions minimales (voir la page www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1205.html).

doute que dessiner un graphe-allumettes en partant seulement de la donnée de ses arêtes exige des calculs qui deviennent déraisonnablement longs quand le nombre d'arêtes augmente.

Le maximum de points distants d'une unité

Un graphe-allumettes est un ensemble de points du plan dont tous ceux liés par une arête sont distants d'une unité exactement. Une question naturelle se pose à propos des ensembles des points distants d'une unité. C'est le grand mathématicien hongrois Paul Erdős qui y a pensé le premier en 1946. Un entier n étant fixé, on considère n points sur un plan ; combien au plus de couples de points peuvent-ils être mutuellement à distance 1 ? À la condition d'autoriser les croisements d'allumettes (ce qui jusqu'à présent n'était pas le cas), ce nombre, que nous noterons $f(n)$, est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe-allumettes ayant n sommets. Erdős s'est penché sur cette suite $f(n)$ qui, depuis, a donné lieu à une série de publications. Quelques dessins permettent de trouver les premières valeurs

de $f(n)$: $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 7, f(6) = 9$.

Au-delà, c'est nettement plus délicat comme le montrent les configurations optimales de l'encadré 4, qui conduisent aux valeurs : $f(7) = 12, f(8) = 14, f(9) = 18, f(10) = 20, f(11) = 23, f(12) = 27, f(13) = 30, f(14) = 33$.

La beauté et l'importance des mathématiques sont sans doute liées à ce que nous constatons en étudiant les graphes-allumettes : au départ, le sujet est simple, et semble n'être qu'une question combinatoire assez facile à maîtriser. Pourtant, en allant y voir de plus près, toutes sortes de mathématiques y glissent leur nez (dénombrements délicats, topologie, polynômes, classes de complexité, etc.) pour, finalement, constituer des vrais et difficiles sujets de recherche dont personne ne sait faire le tour et dont les avancées enrichissent les mathématiques d'objets fascinants, tel le graphe de Harborth. ■



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'Université
de Lille
et chercheur

au Laboratoire d'informatique
fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

S. Kurz et G. Mazzuocollo, **3-regular matchstick graphs with given girth** (<http://arxiv.org/abs/1401.4360>), 2014.

S. Kurz et R. Pinchasi, **Regular matchstick graphs**, *The Amer. Math. Monthly*, vol. 118(3), pp. 264-267, 2011.

E. Gerbracht, **Minimal polynomials for the coordinates of the Harborth graph** (<http://arxiv.org/pdf/math/0609360.pdf>), 2006.

P. Brass, W. Moser et J. Pach, **Research Problems in Discrete Geometry**, Springer, 2005.

Références supplémentaires
sur le site www.pourlascience.fr