

5. Les graphes de Erich Friedman

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8
1							
2							
3							

Erich Friedman s'est intéressé aux graphes-allumettes ayant uniquement des sommets de degré n ou m (n et m étant deux entiers fixés, ici $m = 1, 2, 3$ et $n = 2, 3, \dots, 8$). Nous les nomme-

rons « graphes-allumettes de type $n-m$ ». On recherche à chaque fois les solutions minimales (voir la page www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1205.html).

doute que dessiner un graphe-allumettes en partant seulement de la donnée de ses arêtes exige des calculs qui deviennent déraisonnablement longs quand le nombre d'arêtes augmente.

Le maximum de points distants d'une unité

Un graphe-allumettes est un ensemble de points du plan dont tous ceux liés par une arête sont distants d'une unité exactement. Une question naturelle se pose à propos des ensembles des points distants d'une unité. C'est le grand mathématicien hongrois Paul Erdős qui y a pensé le premier en 1946. Un entier n étant fixé, on considère n points sur un plan ; combien au plus de couples de points peuvent-ils être mutuellement à distance 1 ? À la condition d'autoriser les croisements d'allumettes (ce qui jusqu'à présent n'était pas le cas), ce nombre, que nous noterons $f(n)$, est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe-allumettes ayant n sommets. Erdős s'est penché sur cette suite $f(n)$ qui, depuis, a donné lieu à une série de publications. Quelques dessins permettent de trouver les premières valeurs

de $f(n)$: $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 7, f(6) = 9$.

Au-delà, c'est nettement plus délicat comme le montrent les configurations optimales de l'encadré 4, qui conduisent aux valeurs : $f(7) = 12, f(8) = 14, f(9) = 18, f(10) = 20, f(11) = 23, f(12) = 27, f(13) = 30, f(14) = 33$.

La beauté et l'importance des mathématiques sont sans doute liées à ce que nous constatons en étudiant les graphes-allumettes : au départ, le sujet est simple, et semble n'être qu'une question combinatoire assez facile à maîtriser. Pourtant, en allant y voir de plus près, toutes sortes de mathématiques y glissent leur nez (dénombrements délicats, topologie, polynômes, classes de complexité, etc.) pour, finalement, constituer des vrais et difficiles sujets de recherche dont personne ne sait faire le tour et dont les avancées enrichissent les mathématiques d'objets fascinants, tel le graphe de Harborth. ■



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

■ L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'Université
de Lille
et chercheur

au Laboratoire d'informatique
fondamentale de Lille (LIFL).

■ BIBLIOGRAPHIE

S. Kurz et G. Mazzuocollo, **3-regular matchstick graphs with given girth** (<http://arxiv.org/abs/1401.4360>), 2014.

S. Kurz et R. Pinchasi, **Regular matchstick graphs**, *The Amer. Math. Monthly*, vol. 118(3), pp. 264-267, 2011.

E. Gerbracht, **Minimal polynomials for the coordinates of the Harborth graph** (<http://arxiv.org/pdf/math/0609360.pdf>), 2006.

P. Brass, W. Moser et J. Pach, **Research Problems in Discrete Geometry**, Springer, 2005.

Références supplémentaires
sur le site www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Visions d'un autre monde

Ils peuvent voir de loin, de nuit ou à 360 degrés... Les héros de la science-fiction ont la vue perçante. Pourtant, les animaux terrestres n'ont rien à leur envier.

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

Les yeux des extraterrestres dans la science-fiction font preuve d'une grande diversité : globuleux comme ceux de Jar Jar Binks (*Star Wars*), à pupille verticale pour les aliens de la série télévisée *V*, ou encore à facettes comme chez le monstre d'Edgar Burroughs dans la nouvelle *Yellow Men of Mars* (1948). Si ces organes sont variés, c'est qu'ils doivent aussi faire ressortir la personnalité de leur porteur : E. T. du film éponyme de Steven Spielberg a de grands yeux bleus, signe infaillible que c'est un gentil, tandis que l'atrabilaire Sebulba (*Star Wars*) a de petits yeux jaunes qui lui confèrent un regard perfide. Enfin, les yeux du monstre Alien ne semblent pas visibles, ce qui accentue l'angoisse provoquée par ce superprédateur.

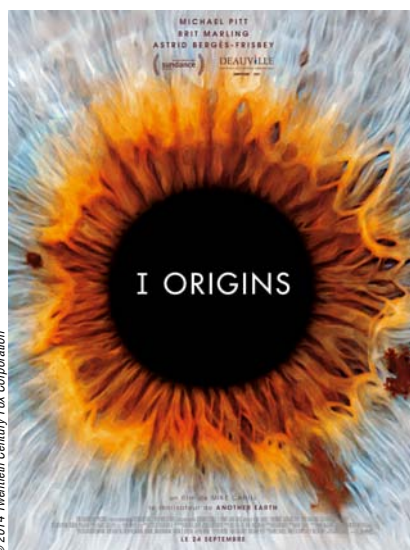
La diversité des yeux extraterrestres rivalise avec celle des animaux sur Terre. Rien que chez l'homme, on peut identifier une personne d'après le motif unique de l'iris, une idée au centre de l'intrigue de *I Origins* (voir la figure 1). La vision est un sens très répandu et l'évolution a conduit à une grande variété de systèmes sensibles à la lumière.

Un dispositif simple, présent chez des organismes unicellulaires, est celui de photorécepteurs capables de détecter la direction et l'intensité d'une source lumineuse. La cellule se dirige alors vers la lumière pour optimiser sa photosynthèse. Chez la plupart des êtres vivants, la lumière

est détectée grâce à une famille de protéines nommées opsines. Celles-ci sont capables d'absorber la lumière pour la convertir en signal électrique traité par le système nerveux.

Dans le monde animal, on trouve deux grandes catégories d'yeux, les simples et les composés, apparus indépendamment au cours de l'évolution. Les yeux simples ont une surface sensible à la lumière sur laquelle l'image est formée. Le nautilus est le seul exemple d'animal à œil simple fonctionnant comme un sténopé, que l'on nomme aussi *camera obscura* ou chambre noire. La lumière entre par un petit trou et se projette sur la face opposée. Avec ce système, l'œil voit net à toutes les distances en même temps, mais l'image est peu lumineuse, car la petite taille du trou ne permet pas de recueillir beaucoup de lumière.

En utilisant la réflexion, l'œil de la coquille Saint-Jacques forme une image plus lumineuse : une couche réflectrice concave, derrière la rétine, joue le rôle de miroir. Les rayons provenant d'une même direction sont ainsi réfléchis différemment selon leur incidence et sont concentrés sur un faible nombre de photorécepteurs, permettant la formation d'une image lumineuse. Enfin, chez les vertébrés et certains mollusques, l'image est formée par réfraction à travers un matériau transparent situé devant la rétine (le cristallin dans l'œil humain). Cela permet de dévier les rayons lumineux et de concentrer ceux provenant



1. DANS *I ORIGINS* (Mike Cahill, 2014), le héros étudie l'évolution de l'œil. Il tombe amoureux d'une femme et la retrouve grâce au motif unique de l'iris de ses yeux.