

LOGIQUE & CALCUL

Les graphes-allumettes

Les graphes d'un seul tenant et dont toutes les arêtes sont de même longueur peuvent être dessinés en disposant des allumettes sur une table. Ils sont loin d'avoir livré tous leurs secrets.

Jean-Paul DELAHAYE

Avec des allumettes, les amateurs méticuleux fabriquent des sculptures étonnantes. Un exemple est celle réalisée par Patrick Acton, un passionné d'architecture gothique qui vit dans l'Iowa : longue de plus de deux mètres, elle représente la cathédrale Notre-Dame de Paris (*cliché ci-contre*). Cette maquette a exigé 298 000 allumettes, 55 litres de colle et 2000 heures de travail (www.matchstickmarvels.com/the-models/notre-dame-cathedral).

Beaucoup moins d'allumettes suffisent à l'amusement d'un mathématicien. Grâce à elles, il découvre de nouveaux aspects de sa discipline en se posant des problèmes géométriques ou topologiques sur les dessins faisables avec des traits ayant tous la même longueur. Il tente de les traiter à la main en manipulant le contenu d'une boîte d'allumettes. Certaines questions le conduisent à établir de délicats catalogues. D'autres se révèlent plus ardues et créent de véritables sujets de recherche où il ne progresse que lentement.

Quand on dispose des allumettes sur une surface plane sans qu'elles se croisent, en les faisant se toucher par leurs extrémités et en composant une forme d'un seul tenant, on dessine des graphes d'un type particulier. Ce sont les « graphes-allumettes » ou « graphes-unités », car on peut supposer que la longueur d'une allumette fixe l'unité de longueur (*voir des exemples dans l'encadré 1*). L'étude de ces graphes-allumettes est à la

fois ludique et sérieuse ; c'est à elle que le mathématicien se consacrera de préférence aux constructions de cathédrales !

Deux graphes G et G' sont équivalents, ou « isomorphes », s'ils ont le même nombre de sommets et d'arêtes et s'il est possible de nommer les sommets de G et de G' d'une telle façon que les arêtes de G (ce sont des couples de sommets) soient exactement les mêmes que les arêtes de G' . Ainsi, dans l'encadré 1, les graphes a et b sont iso-

[on dit aussi « connexes »] : deux sommets quelconques sont toujours joignables par un chemin qui suit les arêtes.

Une première question intéresse le mathématicien : un nombre d'allumettes étant fixé, par exemple 6, combien existe-t-il de graphes-allumettes (d'un seul tenant) différents, c'est-à-dire non isomorphes ? On notera $a(n)$ ce nombre. Il est facile de déterminer $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 3$, $a(4) = 5$. Prenez quelques allumettes et amusez-vous à trouver $a(5)$ (*voir l'encadré 1 pour la réponse*).



LA CATHÉDRALE NOTRE-DAME de Paris, maquette construite avec des allumettes.

morphes. En revanche, les graphes a et c ne le sont pas, ni les graphes c et d . Précisons que les graphes dont nous parlerons ici ne sont pas orientés (l'arête xy est considérée identique à l'arête yx), et qu'il ne peut y avoir ni arête d'un sommet vers lui-même (pas d'arête xx), ni deux arêtes reliant deux fois les mêmes sommets (pas d'arcs doubles). Nous ne le préciserons pas à chaque fois, mais nous ne considérerons que des graphes d'un seul tenant

Dénombrements

Les valeurs de $a(n)$ définissent la suite A066951 de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org/A066951>). On ne les connaît que jusqu'à $a(9)$ et cela seulement depuis 2013, grâce à un travail de Raffaele Salvia (<http://arxiv.org/pdf/1303.5965v2.pdf>). Aucune formule n'a été proposée pour $a(n)$.

Un autre décompte est intéressant : parmi les graphes-allumettes (d'un seul tenant) qu'on dessine avec n allumettes, combien sont topologiquement différents ? Cette question admet presque toujours une réponse différente de la première, car deux graphes G et G' sont topologiquement équivalents (on dit aussi « homéomorphes ») si en imaginant que les graphes sont faits de fils en caoutchouc, il est possible de déformer G pour obtenir G' (il ne faut pas se préoccuper des nœuds, mais seulement des