

souvent ses lecteurs à aller plus loin. Par exemple, Marjory Rice, une femme au foyer ayant pour tout bagage un certificat de fin d'études secondaires, utilisa ce qu'elle avait appris dans un article de Gardner pour découvrir plusieurs types nouveaux de pavages pentagonaux réguliers, c'est-à-dire des polygones à cinq côtés qui s'agencent parfaitement, sans laisser de vides. Elle écrivit à Gardner, qui transmit le résultat à la mathématicienne Doris Schattschneider pour le vérifier.

## Polyominos, jeu de la vie, pavages de Penrose...

La rubrique de Gardner fut le point de départ d'un grand nombre de résultats nouveaux. En 1993, Gardner lui-même identifia les cinq articles qui avaient suscité le plus de réponses des lecteurs : ceux sur les polyominos de Solomon Golomb, sur le jeu de la vie de J. Conway, sur les pavages non périodiques du plan découverts par Roger Penrose, sur la cryptographie RSA et sur le paradoxe de Newcomb (voir l'encadré page 36).

Si certains de ces sujets ont eu tant de succès, c'est peut-être parce qu'il est facile de jouer avec chez soi, en utilisant des objets familiers tels qu'échiquiers, allumettes, cartes et bouts de papier. C'était certainement le cas quand, en mai 1957, Gardner décrivit le travail de S. Golomb, qui venait d'étudier les polyominos, objets formés en mettant côte à côte plusieurs carrés. Un domino est un polyomino constitué de deux carrés, un triomino en a trois, un tétramino quatre, etc. Ils apparaissent dans toutes sortes de problèmes de logique, pavages et jeux populaires, jusqu'aux jeux vidéo modernes tels que *Tetris*.

Certains polyominos apparaissent également comme motifs dans le jeu de la vie de J. Conway. Ce jeu fait intervenir des « cellules », c'est-à-dire des cases d'un réseau carré marquées « vivante » ou « morte », qui vivent (et peuvent ainsi proliférer) ou meurent en obéissant à certaines règles (par exemple, les cellules vivantes ayant deux ou trois voisines survivent, alors que celles qui en ont zéro, une, ou quatre ou plus, meurent). On lance chaque « partie » du jeu à partir d'une configuration initiale, puis les cellules évoluent en respectant les règles. Le jeu de la vie s'inscrivait dans le domaine naissant des « automates cellulaires » qui simulent des systèmes complexes, souvent de manière très détaillée. L'intuition de

J. Conway était qu'un automate trivial à deux états, conçu à la main, avait le potentiel de modéliser un comportement complexe et sujet à évolution.

Après la parution de l'article de Gardner, en octobre 1970, le jeu de la vie acquit rapidement un grand nombre d'adeptes, qui produisirent bientôt des résultats étonnants. Les mathématiciens savaient depuis longtemps qu'une petite liste d'axiomes peut conduire à des vérités profondes, mais la communauté du jeu de la vie du

début des années 1970 en a fait l'expérience directe. Une bonne quarantaine d'années plus tard, ce jeu continue de donner lieu à des découvertes : un nouveau motif auto-constructeur nommé *Gemini* (qui se réplique et détruit le motif parent, tout en se déplaçant obliquement selon un angle différent de 45 degrés, une première) a été présenté en mai 2010, et le premier réplicateur du jeu de la vie qui se clone (lui-même et ses instructions) a été construit en novembre 2013.

## Testez-vous

**Les énigmes de mathématiques récréatives s'inscrivent dans diverses catégories. Pour les résoudre, il faut faire appel à des dons variés, comme l'illustrent les exemples ci-dessous, dont certains sont des classiques (pour les réponses, voir <http://bit.ly/pls-446-gardner>).**

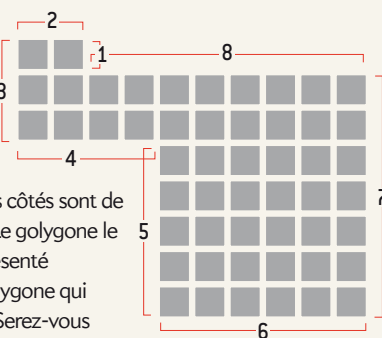
**Certains casse-tête ne demandent pas** beaucoup plus qu'un raisonnement élémentaire. Voici un exemple. On a trois interrupteurs marche/arrêt au rez-de-chaussée d'un bâtiment. Un seul d'entre eux commande l'ampoule du troisième étage (et rien d'autre). Les deux autres interrupteurs ne sont connectés à rien. Mettez les interrupteurs dans les états que vous voulez. Puis montez au troisième vérifier l'ampoule. Sans quitter le troisième étage, pouvez-vous déterminer quel est l'interrupteur qui commande cette ampoule ? Vous n'avez droit qu'à une tentative.

**Les cryptarithmes** mettent un peu plus à l'épreuve les capacités des amateurs de casse-tête. Dans ces problèmes, chaque lettre correspond à un unique chiffre. Par exemple, pouvez-vous déterminer quel chiffre doit représenter chaque lettre pour que l'addition de droite soit juste ?

$$\begin{array}{r} \text{CINQ} \\ + \text{CINQ} \\ + \text{VINGT} \\ \hline \text{TRENTÉ} \end{array}$$

**Un don pour la visualisation** est utile pour résoudre les « colles » géométriques. Essayez de vous représenter une pyramide ayant une base carrée et quatre faces en forme de triangles équilatéraux, à côté d'un tétraèdre dont les quatre faces sont identiques aux triangles de la pyramide. Maintenant, collez une face triangulaire de la pyramide à un triangle du tétraèdre. Combien de faces le polyèdre résultant possède-t-il ? La réponse n'est pas sept !

**Les amateurs de casse-tête**, comme les mathématiciens, doivent parfois résoudre des défis qui reflètent des problèmes généraux ou qui nécessitent la construction de preuves logiques. Prenons les polygones de la classe des « golygones ». Tous les côtés adjacents forment un angle de 90 degrés, et les côtés sont de longueur croissante : 1, 2, 3, 4, et ainsi de suite. Le golygone le plus simple, dont les côtés vont de 1 à 8, est présenté ci-contre. C'est à notre connaissance le seul golygone qui pave le plan. Mais il existe d'autres golygones. Serez-vous capables de prouver que le nombre de leurs côtés est toujours un multiple de 8 ? (voir l'article de J.-P. Delahaye, *Pour la Science*, septembre 2014).



**Les règles des échecs** jouent un rôle dans de nombreux défis, par exemple dans le groupe de problèmes des « reines non attaquées ». Imaginez trois reines blanches et cinq noires sur un échiquier 5 × 5. Saurez-vous les disposer de telle façon qu'aucune reine d'une couleur ne puisse attaquer une reine de l'autre couleur ? Il n'y a qu'une solution (en excluant les symétries et rotations).

J. Conway introduisit aussi Gardner aux pavages découverts par le mathématicien et physicien britannique Roger Penrose, ce qui donna lieu à un autre article très populaire où figurent deux formes de pavés, nommées respectivement cerfs-volants et fléchettes en raison de leur ressemblance avec ces jouets (voir la figure 2). Avec une réserve inépuisable de pavés des deux types, on peut paver un plan infini sans laisser le moindre interstice et avec une propriété remarquable : l'apériodicité. Les pavés de forme ordinaire (carrés, triangles, hexagones) recouvrent un plan en formant des motifs qui se répètent périodiquement. Mais quand on dispose les cerfs-volants et les fléchettes (ou d'autres combinaisons de deux pavés de Penrose ou plus) en respectant certaines règles, paver périodiquement devient impossible.

Ceux qui explorent les propriétés des pavages de Penrose ont, depuis, progressé. Ils ont notamment découvert que les motifs présentent une propriété nommée auto-similarité, qu'ont aussi les fractales, ces structures qui se répètent à différentes échelles (les

fractales ont elles aussi connu une grande popularité en partie grâce à l'article de Gardner sur le sujet en décembre 1976). Et les pavés de Penrose ont aussi contribué à la découverte des quasi-cristaux, qui ont une structure ordonnée mais apériodique. Gardner en était tout réjoui et commenta : « Ce sont de magnifiques illustrations de la façon dont une découverte mathématique, faite sans la moindre idée de ses applications, peut se révéler présente de longue date chez Dame Nature ! »

## Cryptage à clef publique

En août 1977, Gardner anticipa un autre développement moderne : l'utilisation du courrier électronique pour les communications personnelles « d'ici quelques décennies ». Cette prédiction ouvrait un article qui présentait la cryptographie RSA, un système de chiffrement à clef publique fondé sur les fonctions à sens unique (des fonctions faciles à calculer, mais pas à inverser). Ces systèmes n'étaient pas une nouveauté au milieu des années 1970, mais

## BIBLIOGRAPHIE

J.-P. Delahaye, *Flexagones*, Pour la Science n° 333, juillet 2005.

M. Gardner, *Les jeux mathématiques*, Pour la Science n° 252, octobre 1998.

M. Gardner, « Haha » ou l'éclair de la compréhension mathématique, Belin-Pour la Science, 1992.

Le monde mathématique de Martin Gardner, Belin-Pour la Science, 1986.

Site Internet consacré au centenaire de la naissance de Martin Gardner : [www.martin-gardner.org](http://www.martin-gardner.org)

## Le paradoxe de Newcomb : qui veut gagner des millions ?

**M**artin Gardner entend parler d'un problème connu sous le nom de paradoxe de Newcomb dans un article publié en 1969 par le philosophe Robert Nozick, et en fait le sujet de ses rubriques de juillet 1973 et mars 1974. Cette expérience de pensée, créée par le physicien théoricien William Newcomb, s'inspire du mystère de la déterminabilité et du libre arbitre, et elle est toujours activement débattue chez les philosophes.

Un joueur est opposé à un Prédicteur (extra-terrestre superintelligent, voyant ou divinité omnisciente) qui a le don de prédire les actions du joueur. On présente au joueur, ignorant des prédictions, deux boîtes : l'une (A) qui contient toujours 1000 euros, et l'autre (B) qui peut contenir 1 000 000 euros. Il a le choix entre prendre juste la boîte B, ou les deux. Avant que le jeu ne commence, le Prédicteur anticipe ce que va faire le joueur. Si le Prédicteur pense que le joueur ne prendra que la

boîte B, alors il y met la récompense d'un million d'euros. Si le Prédicteur pense que le joueur va prendre les deux boîtes, la boîte B ne contiendra rien.

Le paradoxe surgit parce que les deux stratégies pour gagner le plus d'argent semblent toutes deux logiques. La première suppose que prendre les deux boîtes rapporte toujours plus d'argent, indépendamment de la prédiction du Prédicteur. Si ce dernier prédit que le joueur prendra les deux boîtes, alors le joueur qui choisit les deux

boîtes remporte 1000 euros ; en ne sélectionnant que la boîte B, il ne gagne rien (voir le tableau ci-dessous). Si le Prédicteur anticipe que le joueur ne prendra que la boîte B, le joueur qui choisit les deux boîtes reçoit 1001000 euros ; choisir la seule boîte B rapporte un peu moins (1000000 euros).

Mais selon un autre argument, les plus gros gains résulteront toujours du choix de la seule boîte B. Le raisonnement est que le joueur peut ignorer les cas dans lesquels le choix du joueur diffère de la prédiction parce que ces coups supposent que le Prédicteur se trompe, ce qui, par définition, ne peut arriver à cette

divinité. Il y a donc le choix entre prendre les deux boîtes pour 1000 euros, ou seulement la boîte B pour 1000000 euros.

Les lecteurs de Gardner ont produit des quantités énormes de commentaires, détaillant les différents résultats, mais on ne peut toujours pas dire si une stratégie vaut mieux que l'autre. Dans sa présentation initiale du problème, Nozick commentait : « Pour presque tout le monde, ce qu'il convient de faire est parfaitement clair et évident. La difficulté, c'est que ces gens se partagent en deux camps presque égaux, et que beaucoup pensent que l'autre moitié est tout simplement idiote. »

| CHOIX PRÉDIT     | CHOIX RÉEL  | GAIN            |
|------------------|-------------|-----------------|
| À la fois A et B | Les deux    | 1 000 euros     |
| À la fois A et B | Seulement B | 0 euros         |
| Seulement B      | Les deux    | 1 001 000 euros |
| Seulement B      | Seulement B | 1 000 000 euros |