

L'histoire de la conjecture

L'étude du problème du sudoku minimal par Gary McGuire et son équipe a commencé en 2005, par la mise au point d'un premier programme recherchant, pour une grille complète fixée, toutes les sous-grilles partielles correctes.

Cependant, c'est seulement en 2009, voyant que la solution du problème était peut-être atteignable, que G. McGuire et ses collègues ont entrepris des travaux systématiques. En effet, Gordon Royle avait à cette époque réuni une collection importante de problèmes corrects différents à 17 données. Il recherchait en même temps, mais en vain, un problème ne demandant que 16 données. Cette situation rendait plausible la conjecture que 16 données ne suffisent jamais. Une étonnante grille ayant 29 sous-grilles correctes à 17 données attira l'attention (*ci-dessous*). On ne connaît aujourd'hui encore aucune grille complète ayant 30 sous-grilles correctes à 17 données. Encouragé par ce grand nombre de sous-grilles correctes à

17 données, on espéra un moment en extraire une sous-grille correcte à 16 données. En vain, ce qui fut considéré comme un indice de plus en faveur de la conjecture.

Avant d'en arriver au résultat que 16 données sont insuffisantes, un calcul mené par une équipe de l'Université de Graz en Autriche montra, en 2008, que 11 ne suffisent pas. Le calcul entrepris par cette équipe pour montrer que 12 ne suffisent pas fut abandonné sans aboutir. On était donc loin du but. Rappelons toutefois que le raisonnement mathématique pur ne réussit pas mieux que 7 (*voir l'encadré page 77*) ; la démonstration par ordinateur était donc déjà en avance.

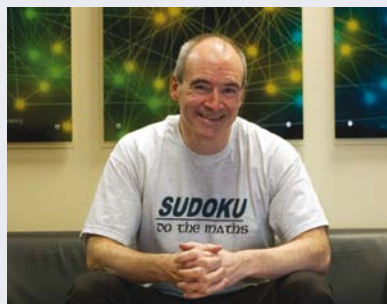
En 2008, une jeune fille de 17 ans proposa une preuve mathématique que 16 données sont insuffisantes, mais on découvrit

rapidement une erreur dans son raisonnement, que personne n'a su corriger.

En 2010, une équipe de l'Université Chiao Tung à Taiwan entreprit de s'attaquer au problème des 16 données en utilisant une méthode de calcul distribué. Elle évalua alors qu'avec les outils dont elle disposait, le problème serait résolu en menant un calcul de 2 400 années-processeurs, par exemple, en faisant calculer 2 400 ordinateurs de table chacun pendant un an. Le calcul a abouti en septembre 2013 (après celui de G. McGuire). C'est la seule vérification à ce jour du théorème des 16 données.

Le calcul de G. McGuire et de son équipe se déroula sur toute l'année 2011, opérant l'équivalent de 800 années-processeurs de calculs. Pour chaque grille de sudoku complète, le temps de traitement a été enregistré. Il a fallu en moyenne 3,6 secondes par grille. L'article rendant compte du résultat a été publié en 2014.

6	3	9	2	4	1	7	8	5
2	8	4	7	6	5	1	9	3
5	1	7	9	8	3	6	2	4
1	2	3	8	5	7	9	4	6
7	9	6	4	3	2	8	5	1
4	5	8	6	1	9	2	3	7
3	4	2	1	7	8	5	6	9
8	6	1	5	9	4	3	7	2
9	7	5	3	2	6	4	1	8



LE MATHÉMATICIEN GARY MCGUIRE (*ci-dessus*) et un sudoku ayant 29 sous-grilles correctes à 17 données (*ci-contre*).

de savoir si la solution est G ou G', et donc le problème sera incorrect. Il en va de même avec les six cases en orangé : permuer les deux rectangles de trois données {7, 2, 1} et {1, 7, 2} donne une grille G' qui n'est exclue que si l'on spécifie au moins une des six cases.

De tels ensembles se dénomment des *ensembles inévitables*. Si, pour une grille complète G, on en trouve k, et qu'ils sont disjoints, alors on est certain que toute grille partielle conduisant à G comportera au moins une donnée dans chaque ensemble inévitable et donc en comportera au moins k. Lorsque certains ensembles inévitables ont une intersection commune, la situation, un peu plus difficile, impose tout de même un nombre minimum de données à toute grille partielle conduisant à G.

La lutte finale

Le travail pour traiter une grille complète G et montrer qu'il faut toujours au moins 17 données se ramène alors à la recherche et à l'exploitation d'ensembles inévitables aussi nombreux que possible. Après divers essais, les chercheurs ont adopté la stratégie suivante, qui a été appliquée à chacune des 5,5 milliards de grilles complètes du catalogue de G. Fowler.

(a) Déterminer (en mettant au point les algorithmes nécessaires) tous les ensembles inévitables de moins de 13 cases. Trouver tous les ensembles inévitables sans limitation de taille, ce qui *a priori* semble meilleur, conduit à plus de calculs au total.

(b) En déduire (toujours en mettant soigneusement au point les algorithmes nécessaires) toutes les sous-grilles de 16 données convenables pour cette famille d'ensembles inévitables, c'est-à-dire ayant au moins un élément dans chaque ensemble inévitable. Cette partie retient considérablement moins de grilles partielles à 16 éléments que les $3,4 \times 10^{16}$ grilles partielles *a priori* envisageables. En moyenne, une grille complète de sudoku a 360 ensembles inévitables de moins de 13 cases.

(c) Pour les grilles partielles retenues, utiliser un programme de test qui indique si oui ou non il y a une solution unique.