

LOGIQUE & CALCUL

Les mathématiques de l'origami

Si l'art du papier plié remonte à plusieurs siècles, son étude mathématique est récente et révèle des liens étroits avec l'algèbre, la théorie des nombres ou l'algorithmique.

Jean-Paul DELAHAYE



L'origami est l'art de plier du papier pour en faire une sculpture, soit géométrique, par exemple une boîte ou un polyèdre, soit figurative – un animal, une fleur, un personnage, etc. Dans la forme pure de l'origami, on part d'une feuille carrée, et seuls sont autorisés des plis rectilignes sans découpage aux ciseaux. Dans d'autres formes de l'art du papier, on accepte l'utilisation de plusieurs feuilles pour une même construction (origami modulaire), leur découpage et leur collage, le mouillage du papier pour en fixer la forme, ou encore l'aide d'outils pour dessiner des plis arrondis.

L'origami, en tant qu'art du pliage sans découpage ni collage à partir d'une feuille carrée, est né au Japon au XVII^e siècle et s'est répandu dans le monde entier au XIX^e. Son histoire plus ancienne est difficile à établir car les œuvres se conservent mal, mais des jeux de pliages ont certainement existé en Chine, en Italie, en Allemagne et en Espagne bien avant le succès mondial de ce délicieux passe-temps créatif.

L'étude mathématique de l'origami commencée dès 1907 a connu des progrès considérables depuis 30 ans et s'est révélée d'une grande richesse. On a su démontrer de remarquables résultats permettant en particulier de savoir quels nombres étaient « constructibles par origami ». Ces nombres sont analogues à ceux « constructibles à la règle et au compas » qui, au XIX^e siècle, ont permis de résoudre (par la

négative) le problème de la quadrature du cercle. Depuis 1989, il existe d'ailleurs un congrès international consacré aux aspects mathématiques de l'origami et à son utilisation dans l'enseignement. La sixième édition de ce congrès s'est réunie en août 2014 à Tokyo.

Les quelques théorèmes que nous allons présenter constituent les bases d'une discipline qui s'étend et semble d'ailleurs devoir jouer un rôle aussi bien en biologie (où le repliement des protéines est un problème central) que dans le domaine des technologies nouvelles où la conception de structures reconfigurables, éventuellement microscopiques, demande une compréhension toujours plus fine des opérations d'articulation et de pliage.

Les canevas de plis

Commençons par nous concentrer sur l'origami pur qui, partant d'une seule feuille de papier carrée, consiste à utiliser des plis rectilignes afin d'arriver à une forme repliée plate. En France, le plus connu de ces pliages purs est la cocotte en papier. Au Japon, c'est un autre oiseau : la grue, plus élégante mais aussi plus difficile.

Prenez une feuille et faites la cocotte (voir l'encadré ci-contre ou la vidéo www.youtube.com/watch?v=770X1FJLlo). Une fois le résultat obtenu, dépliez la feuille et considérez les dessins marqués sur cette feuille par les plis (uniquement ceux

vraiment utiles à la forme finale) en les dessinant en rouge et en bleu : le rouge pour les plis « montagne », le bleu pour les plis « vallée ». Vous avez obtenu ce qu'on nomme le « canevas de l'origami » (*crease pattern* en anglais). Ne croyez pas que n'importe quel schéma de traits rectilignes bleus et rouges est un canevas possible. Deux théorèmes principaux indiquent les règles que vérifie tout canevas d'origami. Ces règles permettent de déceler d'éventuelles erreurs dans le dessin d'un canevas.

Le premier de ces théorèmes indique que les nombres de traits rouges R et de traits bleus B se rencontrant en un point intérieur à la feuille doivent vérifier : $R = B + 2$ ou $R = B - 2$.

Ce théorème, découvert en 1989 par le Français Jacques Justin et redécouvert par la suite par le Japonais Jun Meakawa devrait porter le nom du Français, mais l'usage en a décidé autrement : aujourd'hui, tout le monde désigne par « théorème de Meakawa » cette remarquable propriété ! N'est-il pas étonnant que cette règle très simple et qu'on démontre assez facilement ait attendu aussi longtemps pour être identifiée ? Elle est d'une réelle utilité pour dessiner des canevas justes.

L'encadré ci-contre illustre ce théorème ainsi que d'autres propriétés des canevas d'origamis purs. On y explique aussi que la question de savoir si un canevas satisfaisant les deux théorèmes principaux peut

Cocottes, canevas et théorèmes de l'origami

Les instructions pour obtenir la célèbre cocotte en papier sont indiquées ici (a). Le gallinacé obtenu, remettons la feuille à plat et examinons soigneusement les plis (b). Il y en a trois catégories :

– Les plis *montagne* (en rouge), qui sont ceux où la feuille pliée forme une ligne de crête de la cocotte repliée.

– Les plis *vallée* (en bleu) où, à l'opposé, la feuille pliée présente un creux.

– Quelques autres plis (en gris) ont été utilisés lors de la construction, mais sont à plat dans la forme pliée finale.

Les canevas qui nous intéressent sont ceux des plis finaux. Leurs propriétés mathématiques spécifiques sont :

Propriété 1. Les zones (c, en jaune et en vert) de la feuille délimitées par les plis *montagne* ou *vallée* sont coloriables avec deux couleurs sans que deux zones voisines soient de la même couleur.

Propriété 2. Tout sommet du graphe dessiné par les plis rouges ou bleus et intérieur à la feuille vérifie le théorème de Maekawa : il s'y rejoint soit deux arcs rouges de plus que d'arcs bleus, soit deux arcs bleus de plus que d'arcs rouges. Ici, il y a quatre nœuds intérieurs à la feuille et s'y rencontrent quatre arcs rouges et deux bleus (en haut à gauche), ou (pour les autres) trois arcs bleus et un rouge. Ainsi, le nombre d'arcs se rencontrant en un sommet intérieur est pair, ce qui implique d'ailleurs la propriété 1.

Propriété 3. Les angles formés par les arcs (en nombre pair) concourant en un sommet intérieur ($a_1, a_2, \dots, a_{2n}$) vérifient le théorème de Kawasaki :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n} = 0.$$

Puisque $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2n} = 360^\circ$, la somme des angles de numéro pair et la somme des angles de numéro impair valent chacune 180° . Pour la cocotte en papier, les angles du sommet où se rejoignent quatre arcs rouges et deux bleus sont $a_1 = 90^\circ$, $a_2 = 90^\circ$, $a_3 = 45^\circ$, $a_4 = 45^\circ$, $a_5 = 45^\circ$, $a_6 = 45^\circ$ et on a :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = 0,$$

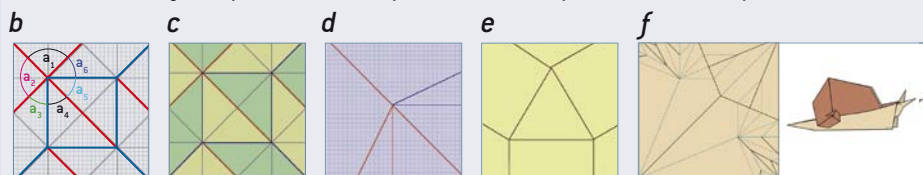
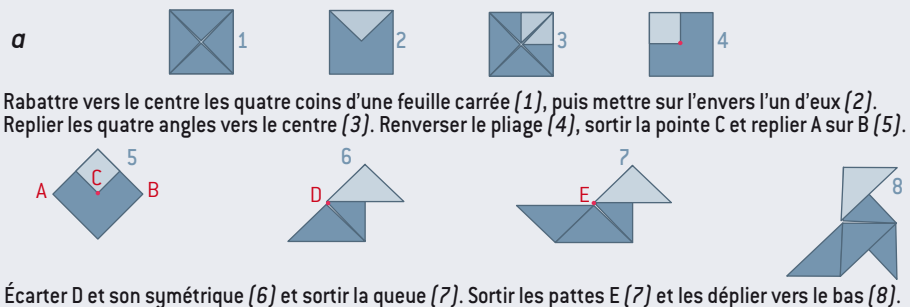
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 360^\circ,$$

$$a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6 = 180^\circ.$$

La condition $a_1 - a_2 + \dots - a_{2n} = 0$ sur les angles autour d'un nœud du graphe est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une façon de plier *localement* à plat la feuille. Autrement dit, si cette condition est vérifiée, il existe une façon de choisir pour chaque pli dessiné s'il est *montagne* ou *vallée* et qui permet le pliage à plat. Une question se pose alors : si un dessin de plis (ne précisant pas les plis *vallée* et *montagne*) est donné, tel que chaque nœud du graphe vérifie la condition du théorème de Kawasaki (donc chaque nœud est localement pliable à plat), peut-on le plier globalement à plat ? La réponse

temps linéaire (en fonction du nombre d'arcs du graphe) et qui trouve une telle assignation s'il y en a, ou conclut qu'il n'en existe pas.

Puisque trouver une telle assignation ne garantit pas que le pliage est faisable, une question se pose : disposant d'une assignation correcte (c'est-à-dire satisfaisant les trois propriétés) peut-on rapidement savoir si la feuille est pliable globalement à plat selon les plis de l'assignation ? Cette fois, la réponse est non, car ce problème est NP-complet : on ne connaît aucun algorithme capable de le



Tout canevas d'origami est impossible s'il n'a pas les trois propriétés, mais tout canevas qui les a ne rend pas possible un pliage selon les plis du canevas (et eux seuls). En effet, en voulant réaliser les pliages dessinés, on rencontre parfois une situation où il faudrait forcer la feuille à se traverser elle-même. Une telle situation est illustrée en d : les trois propriétés sont satisfaites, mais le pliage à plat de l'ensemble est impossible (essayez !).

est non. Un exemple (proposé par Thomas Hull en 1994) d'une telle situation où les pliages à plat sont possibles localement, mais incompatibles globalement, est donné en e. Savoir si, pour un graphe donné sur une feuille, il est possible ou non de choisir *montagne* ou *vallée* pour chaque pli de façon à satisfaire les trois conditions est algorithmiquement facile : Marshall Bern et Barry Hayes ont décrit un algorithme qui fonctionne en

temps polynomial. Le canevas représenté en f est dû au grand origamiste Robert Lang (les plis *montagne* sont tracés en noir et les plis *vallée* en pointillé bleu). Les propriétés 1-3 sont satisfaites à chaque nœud interne de la feuille. Pour un bon origamiste, la connaissance du canevas et d'une image de l'objectif à atteindre suffit : il devinera comment et dans quel ordre opérer les plis pour arriver à la sculpture en papier.