

Cocottes, canevas et théorèmes de l'origami

Les instructions pour obtenir la célèbre cocotte en papier sont indiquées ici (a). Le gallinacé obtenu, remettons la feuille à plat et examinons soigneusement les plis (b). Il y en a trois catégories :

- Les plis *montagne* (en rouge), qui sont ceux où la feuille pliée forme une ligne de crête de la cocotte repliée.

- Les plis *vallée* (en bleu) où, à l'opposé, la feuille pliée présente un creux.

- Quelques autres plis (en gris) ont été utilisés lors de la construction, mais sont à plat dans la forme pliée finale.

Les canevas qui nous intéressent sont ceux des plis finaux. Leurs propriétés mathématiques spécifiques sont :

Propriété 1. Les zones (c, en jaune et en vert) de la feuille délimitées par les plis *montagne* ou *vallée* sont coloriables avec deux couleurs sans que deux zones voisines soient de la même couleur.

Propriété 2. Tout sommet du graphe dessiné par les plis rouges ou bleus et intérieur à la feuille vérifie le théorème de Maekawa : il s'y rejoint soit deux arcs rouges de plus que d'arcs bleus, soit deux arcs bleus de plus que d'arcs rouges. Ici, il y a quatre nœuds intérieurs à la feuille et s'y rencontrent quatre arcs rouges et deux bleus (en haut à gauche), ou (pour les autres) trois arcs bleus et un rouge. Ainsi, le nombre d'arcs se rencontrant en un sommet intérieur est pair, ce qui implique d'ailleurs la propriété 1.

Propriété 3. Les angles formés par les arcs (en nombre pair) concourant en un sommet intérieur ($a_1, a_2, \dots, a_{2n}$) vérifient le théorème de Kawasaki :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n} = 0.$$

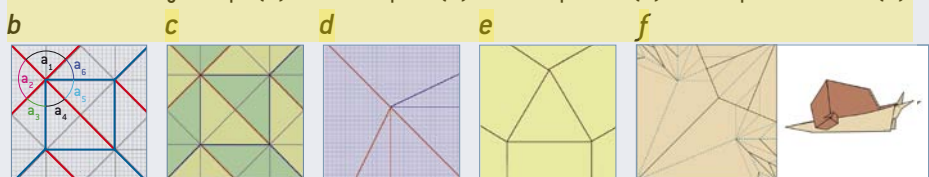
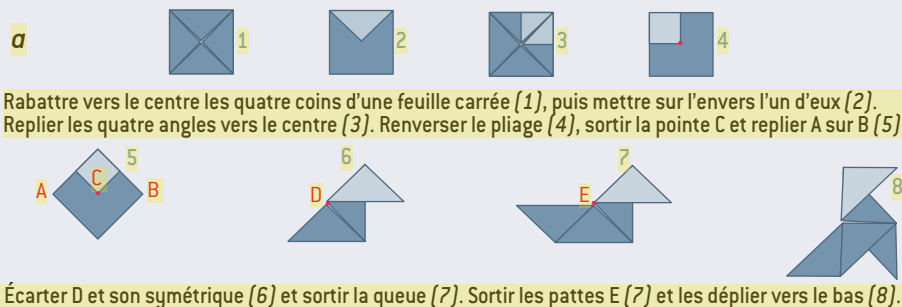
Puisque $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2n} = 360^\circ$, la somme des angles de numéro pair et la somme des angles de numéro impair valent chacune 180° . Pour la cocotte en papier, les angles du sommet où se rejoignent quatre arcs rouges et deux bleus sont $a_1 = 90^\circ$, $a_2 = 90^\circ$, $a_3 = 45^\circ$, $a_4 = 45^\circ$, $a_5 = 45^\circ$, $a_6 = 45^\circ$ et on a :

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 &= 0, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= 360^\circ, \\ a_1 + a_3 + a_5 &= a_2 + a_4 + a_6 = 180^\circ. \end{aligned}$$

La condition $a_1 - a_2 + \dots - a_{2n} = 0$ sur les angles autour d'un nœud du graphe est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une façon de plier *localement* à plat la feuille. Autrement dit, si cette condition est vérifiée, il existe une façon de choisir pour chaque pli dessiné s'il est *montagne* ou *vallée* et qui permet le pliage à plat. Une question se pose alors : si un dessin de plis (ne précisant pas les plis *vallée* et *montagne*) est donné, tel que chaque nœud du graphe vérifie la condition du théorème de Kawasaki (donc chaque nœud est localement pliable à plat), peut-on le plier globalement à plat ? La réponse

temps linéaire (en fonction du nombre d'arcs du graphe) et qui trouve une telle assignation s'il y en a, ou conclut qu'il n'en existe pas.

Puisque trouver une telle assignation ne garantit pas que le pliage est faisable, une question se pose : disposant d'une assignation correcte (c'est-à-dire satisfaisant les trois propriétés) peut-on rapidement savoir si la feuille est pliable globalement à plat selon les plis de l'assignation ? Cette fois, la réponse est non, car ce problème est NP-complet : on ne connaît aucun algorithme capable de le



Tout canevas d'origami est impossible s'il n'a pas les trois propriétés, mais tout canevas qui les a ne rend pas possible un pliage selon les plis du canevas (et eux seuls). En effet, en voulant réaliser les pliages dessinés, on rencontre parfois une situation où il faudrait forcer la feuille à se traverser elle-même. Une telle situation est illustrée en d : les trois propriétés sont satisfaites, mais le pliage à plat de l'ensemble est impossible (essayez !).

est non. Un exemple (proposé par Thomas Hull en 1994) d'une telle situation où les pliages à plat sont possibles localement, mais incompatibles globalement, est donné en e. Savoir si, pour un graphe donné sur une feuille, il est possible ou non de choisir *montagne* ou *vallée* pour chaque pli de façon à satisfaire les trois conditions est algorithmiquement facile : Marshall Bern et Barry Hayes ont décrit un algorithme qui fonctionne en

temps polynomial. Le canevas représenté en f est dû au grand origamiste Robert Lang (les plis *montagne* sont tracés en noir et les plis *vallée* en pointillé bleu). Les propriétés 1-3 sont satisfaites à chaque nœud interne de la feuille. Pour un bon origamiste, la connaissance du canevas et d'une image de l'objectif à atteindre suffit : il devinera comment et dans quel ordre opérer les plis pour arriver à la sculpture en papier.