

Cocottes, canevas et théorèmes de l'origami

Les instructions pour obtenir la célèbre cocotte en papier sont indiquées ici (a). Le gallinacé obtenu, remettons la feuille à plat et examinons soigneusement les plis (b). Il y en a trois catégories :

- Les plis *montagne* (en rouge), qui sont ceux où la feuille pliée forme une ligne de crête de la cocotte repliée.

- Les plis *vallée* (en bleu) où, à l'opposé, la feuille pliée présente un creux.

- Quelques autres plis (en gris) ont été utilisés lors de la construction, mais sont à plat dans la forme pliée finale.

Les canevas qui nous intéressent sont ceux des plis finaux. Leurs propriétés mathématiques spécifiques sont :

Propriété 1. Les zones (c, en jaune et en vert) de la feuille délimitées par les plis *montagne* ou *vallée* sont coloriables avec deux couleurs sans que deux zones voisines soient de la même couleur.

Propriété 2. Tout sommet du graphe dessiné par les plis rouges ou bleus et intérieur à la feuille vérifie le théorème de Maekawa : il s'y rejoint soit deux arcs rouges de plus que d'arcs bleus, soit deux arcs bleus de plus que d'arcs rouges. Ici, il y a quatre nœuds intérieurs à la feuille et s'y rencontrent quatre arcs rouges et deux bleus (en haut à gauche), ou (pour les autres) trois arcs bleus et un rouge. Ainsi, le nombre d'arcs se rencontrant en un sommet intérieur est pair, ce qui implique d'ailleurs la propriété 1.

Propriété 3. Les angles formés par les arcs (en nombre pair) concourant en un sommet intérieur ($a_1, a_2, \dots, a_{2n}$) vérifient le théorème de Kawasaki :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n} = 0.$$

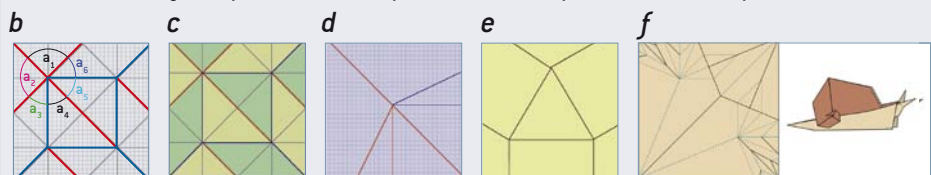
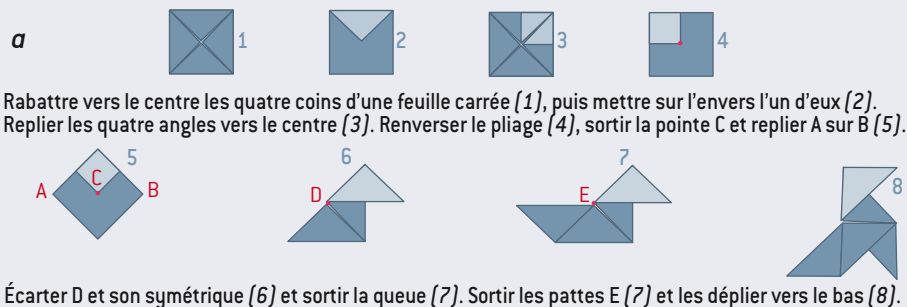
Puisque $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2n} = 360^\circ$, la somme des angles de numéro pair et la somme des angles de numéro impair valent chacune 180° . Pour la cocotte en papier, les angles du sommet où se rejoignent quatre arcs rouges et deux bleus sont $a_1 = 90^\circ$, $a_2 = 90^\circ$, $a_3 = 45^\circ$, $a_4 = 45^\circ$, $a_5 = 45^\circ$, $a_6 = 45^\circ$ et on a :

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 &= 0, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= 360^\circ, \\ a_1 + a_3 + a_5 &= a_2 + a_4 + a_6 = 180^\circ. \end{aligned}$$

La condition $a_1 - a_2 + \dots - a_{2n} = 0$ sur les angles autour d'un nœud du graphe est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une façon de plier *localement* à plat la feuille. Autrement dit, si cette condition est vérifiée, il existe une façon de choisir pour chaque pli dessiné s'il est *montagne* ou *vallée* et qui permet le pliage à plat. Une question se pose alors : si un dessin de plis (ne précisant pas les plis *vallée* et *montagne*) est donné, tel que chaque nœud du graphe vérifie la condition du théorème de Kawasaki (donc chaque nœud est localement pliable à plat), peut-on le plier globalement à plat ? La réponse

temps linéaire (en fonction du nombre d'arcs du graphe) et qui trouve une telle assignation s'il y en a, ou conclut qu'il n'en existe pas.

Puisque trouver une telle assignation ne garantit pas que le pliage est faisable, une question se pose : disposant d'une assignation correcte (c'est-à-dire satisfaisant les trois propriétés) peut-on rapidement savoir si la feuille est pliable globalement à plat selon les plis de l'assignation ? Cette fois, la réponse est non, car ce problème est NP-complet : on ne connaît aucun algorithme capable de le



Tout canevas d'origami est impossible s'il n'a pas les trois propriétés, mais tout canevas qui les a ne rend pas possible un pliage selon les plis du canevas (et eux seuls). En effet, en voulant réaliser les pliages dessinés, on rencontre parfois une situation où il faudrait forcer la feuille à se traverser elle-même. Une telle situation est illustrée en d : les trois propriétés sont satisfaites, mais le pliage à plat de l'ensemble est impossible (essayez !).

est non. Un exemple (proposé par Thomas Hull en 1994) d'une telle situation où les pliages à plat sont possibles localement, mais incompatibles globalement, est donné en e. Savoir si, pour un graphe donné sur une feuille, il est possible ou non de choisir *montagne* ou *vallée* pour chaque pli de façon à satisfaire les trois conditions est algorithmiquement facile : Marshall Bern et Barry Hayes ont décrit un algorithme qui fonctionne en

temps polynomial. Le canevas représenté en f est dû au grand origamiste Robert Lang (les plis *montagne* sont tracés en noir et les plis *vallée* en pointillé bleu). Les propriétés 1-3 sont satisfaites à chaque nœud interne de la feuille. Pour un bon origamiste, la connaissance du canevas et d'une image de l'objectif à atteindre suffit : il devinera comment et dans quel ordre opérer les plis pour arriver à la sculpture en papier.

Les axiomes de Justin-Huzita-Hatori

Les constructions de plis et de points par intersection de plis faisables lorsqu'on manipule une feuille de papier (supposée plane) sont décrites par une série de sept axiomes découverts par Jacques Justin, Humaki Huzita et Koshiro Hatori.

Axiome 1. Étant donnés deux points p_1 et p_2 , il existe un pli unique passant par eux.

Axiome 2. Étant donnés deux points p_1 et p_2 , il existe un pli unique amenant p_1 sur p_2 .

Axiome 3. Étant données deux droites d_1 et d_2 , il existe un pli qui amène d_1 sur d_2 .

Axiome 4. Étant donné un point p et une droite d , il existe un pli unique perpendiculaire à d qui passe par p .

Axiome 5. Étant donnés deux points p_1, p_2 et une droite d , il existe un pli qui place p_1 sur d et qui passe par p_2 .

Axiome 6. Étant donnés deux points p_1, p_2 et deux droites d_1, d_2 , il existe un pli qui place p_1 sur d_1 et p_2 sur d_2 .

Axiome 7. Étant donné un point p et deux droites d_1 et d_2 , il existe un pli qui place p sur d_1 et qui est perpendiculaire à d_2 .

Ces axiomes n'envi-
sagent qu'un seul pli à la

fois. La possibilité de faire plusieurs plis à la fois a été étudiée et on a montré qu'elle enrichit le répertoire des possibilités.

Si l'on a au départ deux points supposés distants d'une unité, et qu'on considère tous les points que peuvent faire apparaître les pliages successifs de la feuille sur laquelle ils sont donnés, ce qui revient à appliquer les axiomes 1-7, les coordonnées des points résultants constituent l'ensemble des nombres constructibles par origami, que l'on notera OR. L'idée de la définition est analogue à celle de l'ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas défini à partir de deux points distants d'une unité. Cet ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas sera noté RC.

Un cercle étant donné sur un plan, peut-on dessiner à

la règle et au compas un carré dont l'aire soit la même que celle du disque délimité par le cercle? Ce problème dit de la quadrature du cercle équivaut à déterminer si le nombre π est dans RC. Grâce aux travaux de Ferdinand Lindemann, on sait depuis 1882 que la réponse est négative: aucune construction à la règle et au compas ne permettra, partant de deux points distants d'une unité, d'en construire deux distants de π unités. La théorie des constructions à la règle et au compas montre aussi que la racine cubique de 2 n'est pas dans RC, et la trisection d'un angle quelconque est impossible à la règle et au compas.

L'ensemble OR est plus grand que RC. Le nombre π n'est pas dans OR et la quadrature du cercle reste impossible par origami, mais la racine cubique de 2 l'est. L'antique problème de la duplication du cube, impossible à la règle et au compas, est donc soluble par origami. On peut aussi triser un angle par origami (voir l'encadré suivant).

vraiment se plier à plat est NP-complet (c'est-à-dire algorithmiquement difficile).

Quand on opère des plis, par exemple pour amener l'un sur l'autre deux plis déjà marqués sur la feuille, on réalise l'équivalent d'une construction géométrique sur la feuille. La trace de l'ensemble des plis sera observée en remettant la feuille à plat. Ces constructions géométriques par pliage qu'on imagine réaliser avec une précision parfaite (plis infiniment fins et rectilignes, alignements exacts, etc.), sont analogues aux constructions que les Grecs faisaient avec une règle et un compas, et qui les ont conduits à énoncer le célèbre problème de la quadrature du cercle, attribué à Anaxagore vers - 430 : construire π à la règle et au compas (voir l'encadré ci-contre).

Sept types de plis pris comme axiomes

Les mathématiciens origamistes se sont donc demandé si les pliages autorisent plus de constructions, moins de constructions ou exactement les mêmes constructions que la règle et le compas des Grecs. La réponse, subtile, est d'une remarquable précision.

Elle nécessite d'abord de déterminer explicitement les opérations de pliage qu'on s'autorise et de les classer. Quand on opère un seul pli à la fois, il y a sept plis possibles, donc sept constructions possibles d'un nouveau pli à partir de plis ou de points déjà présents sur la feuille. Ces sept opérations de base définissent les sept axiomes de base de l'origami, les « axiomes de Justin-Huzita-Hatori ».

Si l'on s'impose de n'utiliser que les quatre premiers axiomes, on parle d'origami pythagoricien; le pouvoir de construction géométrique obtenu est celui de la règle et du compas à pointe sèche (qui permet de reporter des longueurs, mais pas de dessiner des cercles).

Ce pouvoir de construction définit les « nombres pythagoriciens » qui sont les nombres pouvant intervenir dans les coordonnées d'un point résultant d'une construction au moyen des quatre axiomes (ou à

