

Les axiomes de Justin-Huzita-Hatori

Les constructions de plis et de points par intersection de plis faisables lorsqu'on manipule une feuille de papier (supposée plane) sont décrites par une série de sept axiomes découverts par Jacques Justin, Humaki Huzita et Koshiro Hatori.

Axiome 1. Étant donnés deux points p_1 et p_2 , il existe un pli unique passant par eux.

Axiome 2. Étant donnés deux points p_1 et p_2 , il existe un pli unique amenant p_1 sur p_2 .

Axiome 3. Étant données deux droites d_1 et d_2 , il existe un pli qui amène d_1 sur d_2 .

Axiome 4. Étant donné un point p et une droite d , il existe un pli unique perpendiculaire à d qui passe par p .

Axiome 5. Étant donnés deux points p_1, p_2 et une droite d , il existe un pli qui place p_1 sur d et qui passe par p_2 .

Axiome 6. Étant donnés deux points p_1, p_2 et deux droites d_1, d_2 , il existe un pli qui place p_1 sur d_1 et p_2 sur d_2 .

Axiome 7. Étant donné un point p et deux droites d_1 et d_2 , il existe un pli qui place p sur d_1 et qui est perpendiculaire à d_2 .

Ces axiomes n'envi-
sagent qu'un seul pli à la

fois. La possibilité de faire plusieurs plis à la fois a été étudiée et on a montré qu'elle enrichit le répertoire des possibilités.

Si l'on a au départ deux points supposés distants d'une unité, et qu'on considère tous les points que peuvent faire apparaître les pliages successifs de la feuille sur laquelle ils sont donnés, ce qui revient à appliquer les axiomes 1-7, les coordonnées des points résultants constituent l'ensemble des nombres constructibles par origami, que l'on notera OR. L'idée de la définition est analogue à celle de l'ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas défini à partir de deux points distants d'une unité. Cet ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas sera noté RC.

Un cercle étant donné sur un plan, peut-on dessiner à

la règle et au compas un carré dont l'aire soit la même que celle du disque délimité par le cercle? Ce problème dit de la quadrature du cercle équivaut à déterminer si le nombre π est dans RC. Grâce aux travaux de Ferdinand Lindemann, on sait depuis 1882 que la réponse est négative: aucune construction à la règle et au compas ne permettra, partant de deux points distants d'une unité, d'en construire deux distants de π unités. La théorie des constructions à la règle et au compas montre aussi que la racine cubique de 2 n'est pas dans RC, et la trisection d'un angle quelconque est impossible à la règle et au compas.

L'ensemble OR est plus grand que RC. Le nombre π n'est pas dans OR et la quadrature du cercle reste impossible par origami, mais la racine cubique de 2 l'est. L'antique problème de la duplication du cube, impossible à la règle et au compas, est donc soluble par origami. On peut aussi triser un angle par origami (voir l'encadré suivant).

vraiment se plier à plat est NP-complet (c'est-à-dire algorithmiquement difficile).

Quand on opère des plis, par exemple pour amener l'un sur l'autre deux plis déjà marqués sur la feuille, on réalise l'équivalent d'une construction géométrique sur la feuille. La trace de l'ensemble des plis sera observée en remettant la feuille à plat. Ces constructions géométriques par pliage qu'on imagine réaliser avec une précision parfaite (plis infiniment fins et rectilignes, alignements exacts, etc.), sont analogues aux constructions que les Grecs faisaient avec une règle et un compas, et qui les ont conduits à énoncer le célèbre problème de la quadrature du cercle, attribué à Anaxagore vers - 430 : construire π à la règle et au compas (voir l'encadré ci-contre).

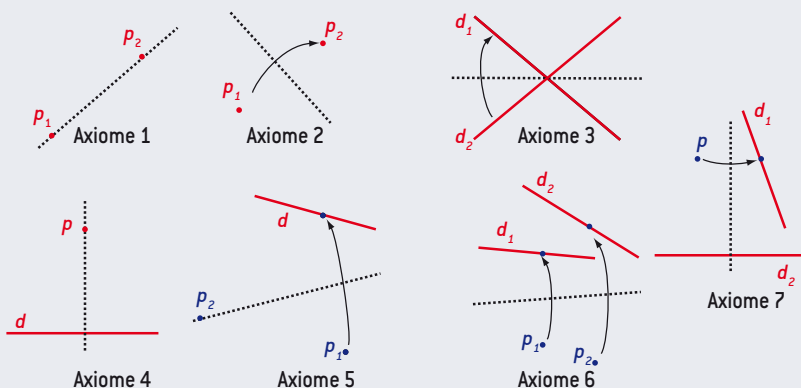
Sept types de plis pris comme axiomes

Les mathématiciens origamistes se sont donc demandé si les pliages autorisent plus de constructions, moins de constructions ou exactement les mêmes constructions que la règle et le compas des Grecs. La réponse, subtile, est d'une remarquable précision.

Elle nécessite d'abord de déterminer explicitement les opérations de pliage qu'on s'autorise et de les classer. Quand on opère un seul pli à la fois, il y a sept plis possibles, donc sept constructions possibles d'un nouveau pli à partir de plis ou de points déjà présents sur la feuille. Ces sept opérations de base définissent les sept axiomes de base de l'origami, les « axiomes de Justin-Huzita-Hatori ».

Si l'on s'impose de n'utiliser que les quatre premiers axiomes, on parle d'origami pythagoricien; le pouvoir de construction géométrique obtenu est celui de la règle et du compas à pointe sèche (qui permet de reporter des longueurs, mais pas de dessiner des cercles).

Ce pouvoir de construction définit les « nombres pythagoriciens » qui sont les nombres pouvant intervenir dans les coordonnées d'un point résultant d'une construction au moyen des quatre axiomes (ou à



la règle et au compas à pointe sèche). Sur le plan algébrique, les nombres pythagoriciens s'obtiennent en partant des entiers et en opérant successivement, autant de fois qu'on le veut, des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions et l'opération qui à a et b associe la racine carrée de $a^2 + b^2$. Ainsi, $\sqrt{2}$ est un nombre pythagorien puisque $2 = 1^2 + 1^2$, et il en est de même, par exemple, du nombre :

$$\frac{\sqrt{9 + (1 + \sqrt{2})^2}}{11 / \sqrt{2}}$$

Les racines carrées de nombres entiers (tel 3) qui ne sont pas sommes de deux carrés d'entiers ne sont pas des nombres pythagoriciens. Le nombre π et la racine

cubique de 2 ne sont pas pythagoriciens non plus.

Ce pouvoir de construction des plis des quatre premiers axiomes est inférieur à celui de la règle et du compas. Pour obtenir ce pouvoir de construction (ni plus, ni moins), il faut ajouter le cinquième type de plis, défini par l'axiome 5.

Construire les nombres euclidiens par origami

Les nombres obtenus sont qualifiés d'euclidiens : ce sont tous les nombres qu'on obtient à partir des entiers en effectuant des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions et des extractions

de racine carrée. Par exemple, le nombre suivant est euclidien :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}/(4 + \sqrt{11})}}{\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{21}}}$$

On sait que le nombre π n'est pas euclidien et c'est pourquoi le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution quand on s'impose de n'utiliser que la règle et le compas. Il n'en aura pas non plus avec les constructions par pliage avec les cinq premiers types de plis et même avec les sept. La racine cubique de 2 n'est pas non plus un nombre euclidien et c'est pourquoi l'antique problème de la duplication du cube (partant d'un cube donné, construire à la règle et au

Théorème de Haga, duplication du cube, trisection d'un angle

Les nombres rationnels

Le théorème de Kazuo Haga indique un moyen de construire rapidement par pliage tout nombre rationnel (quotient de deux entiers).

On part (figure I) d'une feuille carrée de côté 1, où est marqué un point P sur le bord en haut du carré. Ce point P a été obtenu par des opérations de plis précédentes. On effectue le pli qui amène le coin en bas à gauche sur P. Posons $x = AP$. Un petit raisonnement montre que $y = BQ = 2x/(1+x)$. Si l'on prend $x = 1/2$, on obtient $y = 2/3$, d'où

l'on déduit $1/3$. Par ce procédé, de proche en proche, on obtient toutes les fractions que l'on veut. Le tableau ci-contre constitue une aide.

Racine cubique de 2

Le pliage de Peter Messer permet de « calculer » la racine cubique de 2 (impossible à obtenir à la règle et au compas).

On fait glisser le point P (le coin gauche en bas de la feuille carrée) sur le bord de la feuille en haut (figure II). On le place au départ en haut à gauche, puis on le fait aller vers la droite

jusqu'à ce que le point Q (le bas de la ligne verticale à $1/3$ de distance du bord gauche de la feuille) rejoigne la ligne verticale à $2/3$ de distance du bord gauche de la feuille. Quand cela se produit, on a la position définitive de P et PB/PA est égal à la racine cubique de 2.

Trisection d'un angle

Voici la construction par origami de la trisection d'un angle CAB, due à Hisashi Abe (figure III). On fait deux plis horizontaux PP' et QQ' de façon que QQ' soit au milieu entre PP'

et le bord inférieur du carré de papier. Puis on amène P sur le segment AC, en même temps que le point A est amené sur le pli QQ' . L'angle $A'AB$ est le tiers de l'angle CAB (car les trois angles PAQ , QAA' , $A'AB$ sont égaux).

AP	BQ	QC	AR	PQ
x	$2x/(1+x)$	$[1-x]/(1+x)$	$[1-x^2]/2$	$[1+x^2]/(1+x)$
1/2	2/3	1/3	3/8	5/6
1/3	1/2	1/2	4/9	5/6
2/3	4/5	1/5	5/18	13/15
1/5	1/3	2/3	12/25	13/15

