

la règle et au compas à pointe sèche). Sur le plan algébrique, les nombres pythagoriciens s'obtiennent en partant des entiers et en opérant successivement, autant de fois qu'on le veut, des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions et l'opération qui à a et b associe la racine carrée de $a^2 + b^2$. Ainsi, $\sqrt{2}$ est un nombre pythagorien puisque $2 = 1^2 + 1^2$, et il en est de même, par exemple, du nombre :

$$\frac{\sqrt{9 + (1 + \sqrt{2})^2}}{11 / \sqrt{2}}$$

Les racines carrées de nombres entiers (tel 3) qui ne sont pas sommes de deux carrés d'entiers ne sont pas des nombres pythagoriciens. Le nombre π et la racine

cubique de 2 ne sont pas pythagoriciens non plus.

Ce pouvoir de construction des plis des quatre premiers axiomes est inférieur à celui de la règle et du compas. Pour obtenir ce pouvoir de construction (ni plus, ni moins), il faut ajouter le cinquième type de plis, défini par l'axiome 5.

Construire les nombres euclidiens par origami

Les nombres obtenus sont qualifiés d'euclidiens : ce sont tous les nombres qu'on obtient à partir des entiers en effectuant des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions et des extractions

de racine carrée. Par exemple, le nombre suivant est euclidien :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}/(4 + \sqrt{11})}}{\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{21}}}$$

On sait que le nombre π n'est pas euclidien et c'est pourquoi le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution quand on s'impose de n'utiliser que la règle et le compas. Il n'en aura pas non plus avec les constructions par pliage avec les cinq premiers types de plis et même avec les sept. La racine cubique de 2 n'est pas non plus un nombre euclidien et c'est pourquoi l'antique problème de la duplication du cube (partant d'un cube donné, construire à la règle et au

Théorème de Haga, duplication du cube, trisection d'un angle

Les nombres rationnels

Le théorème de Kazuo Haga indique un moyen de construire rapidement par pliage tout nombre rationnel (quotient de deux entiers).

On part (figure I) d'une feuille carrée de côté 1, où est marqué un point P sur le bord en haut du carré. Ce point P a été obtenu par des opérations de plis précédentes. On effectue le pli qui amène le coin en bas à gauche sur P. Posons $x = AP$. Un petit raisonnement montre que $y = BQ = 2x/(1+x)$. Si l'on prend $x = 1/2$, on obtient $y = 2/3$, d'où

l'on déduit $1/3$. Par ce procédé, de proche en proche, on obtient toutes les fractions que l'on veut. Le tableau ci-contre constitue une aide.

Racine cubique de 2

Le pliage de Peter Messer permet de « calculer » la racine cubique de 2 (impossible à obtenir à la règle et au compas).

On fait glisser le point P (le coin gauche en bas de la feuille carrée) sur le bord de la feuille en haut (figure II). On le place au départ en haut à gauche, puis on le fait aller vers la droite

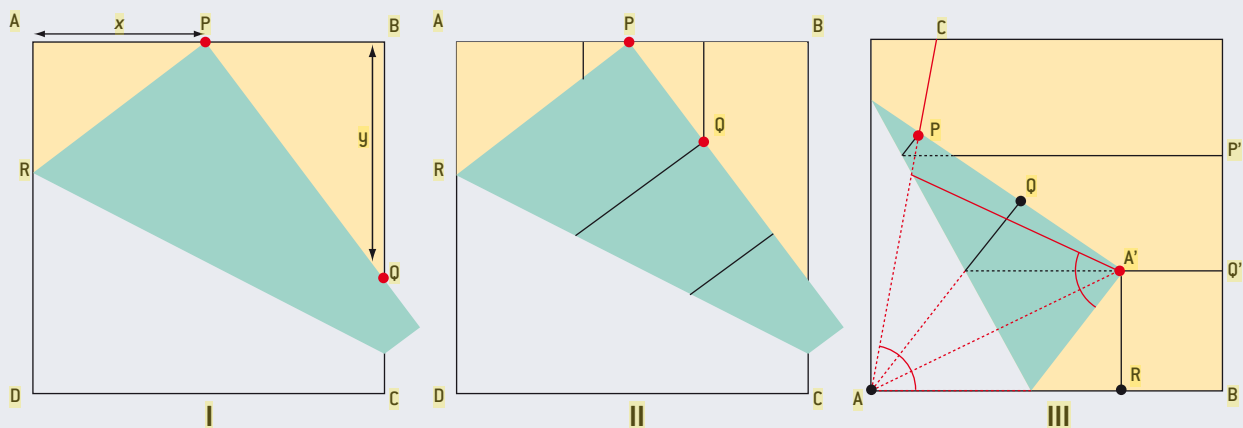
jusqu'à ce que le point Q (le bas de la ligne verticale à $1/3$ de distance du bord gauche de la feuille) rejoigne la ligne verticale à $2/3$ de distance du bord gauche de la feuille. Quand cela se produit, on a la position définitive de P et PB/PA est égal à la racine cubique de 2.

Trisection d'un angle

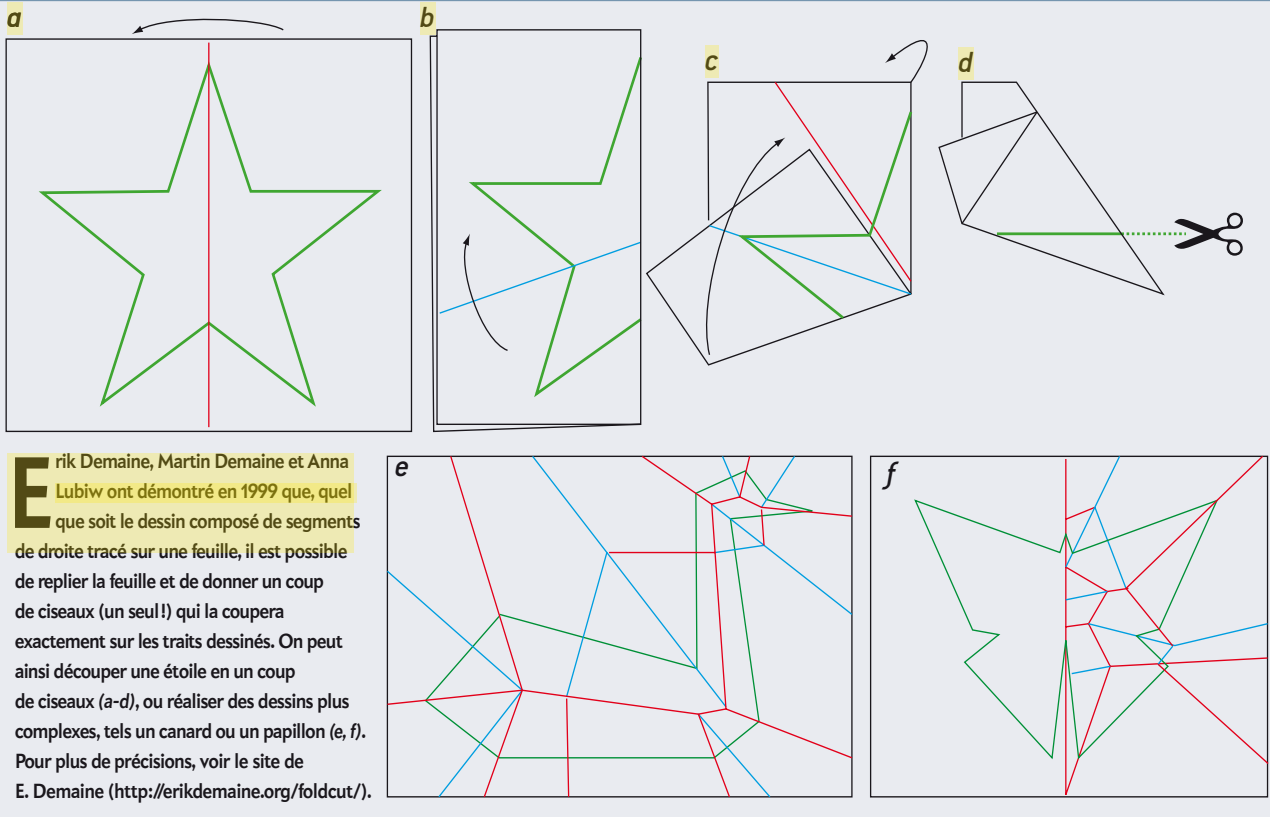
Voici la construction par origami de la trisection d'un angle CAB, due à Hisashi Abe (figure III). On fait deux plis horizontaux PP' et QQ' de façon que QQ' soit au milieu entre PP'

et le bord inférieur du carré de papier. Puis on amène P sur le segment AC, en même temps que le point A est amené sur le pli QQ' . L'angle $A'AB$ est le tiers de l'angle CAB (car les trois angles PAQ , QAA' , $A'AB$ sont égaux).

AP	BQ	QC	AR	PQ
x	$2x/(1+x)$	$(1-x)/(1+x)$	$(1-x^2)/2$	$(1+x^2)/(1+x)$
1/2	2/3	1/3	3/8	5/6
1/3	1/2	1/2	4/9	5/6
2/3	4/5	1/5	5/18	13/15
1/5	1/3	2/3	12/25	13/15



Tout faire en un seul coup de ciseaux



compas un cube dont le volume soit double] n'a pas de solution.

Les cinq premiers axiomes de l'origami conférant le pouvoir de construction de la règle et du compas, l'ajout des axiomes 6 et 7 du pliage offre-t-il le moyen de le dépasser ? La réponse est oui. L'ensemble des « nombres constructibles par origami » (avec les sept types de plis) est plus grand que l'ensemble des nombres euclidiens. Du point de vue du mathématicien, cet ensemble de nombres s'obtient à partir des entiers en opérant des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions, des extractions de racine carrée et des extractions de racine cubique. Un exemple de nombre constructible par origami, mais qui ne l'est pas à la règle et au compas, est ainsi :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{21}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}/(4 + \sqrt{2})}}$$

Cette fois, la duplication du cube est possible, de même d'ailleurs que la trisection de l'angle, qui ne l'est ni avec les cinq premiers axiomes, ni à la règle et au compas. L'étude de l'axiome 7 montre qu'il est superflu, car les constructions qu'il permet sont les mêmes que celles obtenues avec les six premiers. Ces nombres constructibles par origami contiennent tous les nombres solution d'une équation polynomiale de degré 1, 2, 3, ou 4. Des procédés pratiques de pliage ont été décrits pour résoudre par pliages les équations quelconques de degré 3. Ce pouvoir de construction de l'origami est celui dont aurait disposé un géomètre grec muni d'une règle et d'un compas et capable de tracer exactement toute conique (ellipses, paraboles, hyperboles).

Même avec les sept plis, on ne réussira pas la quadrature du cercle, et beaucoup de nombres algébriques (solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers),

tels que la racine cinquième de 2, sont aussi hors de portée.

Cependant, si l'on envisage des plis multiples – plusieurs plis sont ajustés simultanément pour obtenir une certaine construction –, on obtient avec l'origami un pouvoir de construction encore supérieur, dont on ignore aujourd'hui jusqu'où il va exactement.

Plis multiples pour nombres algébriques

Robert Lang a par exemple montré que la quintisection [division d'un angle donné en cinq angles égaux] d'un angle quelconque est impossible en utilisant les sept axiomes de base de l'origami, mais qu'en acceptant un double pliage, elle devient possible. L'étude de ces nouveaux plis risque d'être difficile, et l'ordinateur sera indispensable. C'est grâce à lui que Roger Alperin et R. Lang ont calculé que le nombre