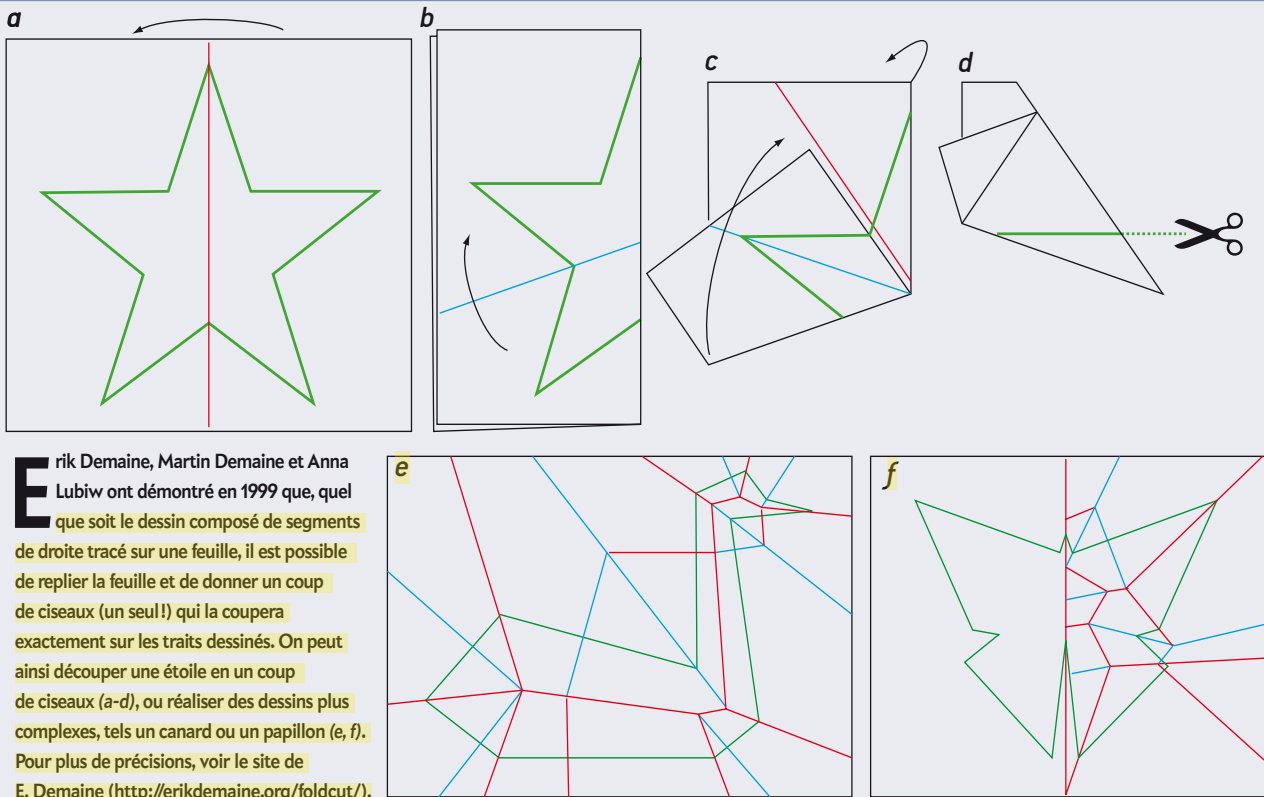


Tout faire en un seul coup de ciseaux



Erik Demaine, Martin Demaine et Anna Lubiw ont démontré en 1999 que, quel que soit le dessin composé de segments de droite tracé sur une feuille, il est possible de replier la feuille et de donner un coup de ciseaux (un seul !) qui la coupera exactement sur les traits dessinés. On peut ainsi découper une étoile en un coup de ciseaux (a-d), ou réaliser des dessins plus complexes, tels un canard ou un papillon (e, f). Pour plus de précisions, voir le site de E. Demaine (<http://erikdemaine.org/foldcut/>).

compas un cube dont le volume soit double] n'a pas de solution.

Les cinq premiers axiomes de l'origami conférant le pouvoir de construction de la règle et du compas, l'ajout des axiomes 6 et 7 du pliage offre-t-il le moyen de le dépasser ? La réponse est oui. L'ensemble des « nombres constructibles par origami » [avec les sept types de plis] est plus grand que l'ensemble des nombres euclidiens. Du point de vue du mathématicien, cet ensemble de nombres s'obtient à partir des entiers en opérant des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions, des extractions de racine carrée et des extractions de racine cubique. Un exemple de nombre constructible par origami, mais qui ne l'est pas à la règle et au compas, est ainsi :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{21}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}/(4 + \sqrt{2})}}$$

Cette fois, la duplication du cube est possible, de même d'ailleurs que la trisection de l'angle, qui ne l'est ni avec les cinq premiers axiomes, ni à la règle et au compas. L'étude de l'axiome 7 montre qu'il est superflu, car les constructions qu'il permet sont les mêmes que celles obtenues avec les six premiers. Ces nombres constructibles par origami contiennent tous les nombres solution d'une équation polynomiale de degré 1, 2, 3, ou 4. Des procédés pratiques de pliage ont été décrits pour résoudre par pliages les équations quelconques de degré 3. Ce pouvoir de construction de l'origami est celui dont aurait disposé un géomètre grec muni d'une règle et d'un compas et capable de tracer exactement toute conique (ellipses, paraboles, hyperboles).

Même avec les sept plis, on ne réussira pas la quadrature du cercle, et beaucoup de nombres algébriques (solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers),

tels que la racine cinquième de 2, sont aussi hors de portée.

Cependant, si l'on envisage des plis multiples – plusieurs plis sont ajustés simultanément pour obtenir une certaine construction –, on obtient avec l'origami un pouvoir de construction encore supérieur, dont on ignore aujourd'hui jusqu'où il va exactement.

Plis multiples pour nombres algébriques

Robert Lang a par exemple montré que la quintisection [division d'un angle donné en cinq angles égaux] d'un angle quelconque est impossible en utilisant les sept axiomes de base de l'origami, mais qu'en acceptant un double pliage, elle devient possible. L'étude de ces nouveaux plis risque d'être difficile, et l'ordinateur sera indispensable. C'est grâce à lui que Roger Alperin et R. Lang ont calculé que le nombre

d'axiomes à envisager pour les doubles plis est 489. Ces deux chercheurs ont aussi établi qu'en autorisant $(n - 2)$ plis simultanés, il devient possible de résoudre n'importe quelle équation polynomiale à coefficients entiers de degré n . Cela établit que le pouvoir théorique de construction de l'origami, conçu sous sa forme la plus générale avec des plis multiples, donne tous les nombres algébriques, ce qui était inespéré.

Le théorème de la découpe unique

Dans un de ses tours, le célèbre prestidigitateur américain Harry Houdini effectuait le pliage d'une feuille de papier, donnait un coup de ciseaux et déplaçait la feuille, qui montrait alors un trou parfait en forme d'étoile à cinq branches. Le pliage qui le permet n'est pas très compliqué, mais il suggère une question que Martin Gardner posa dans un article il y a plus de 20 ans : en opérant ainsi — des pliages, puis un coup de ciseaux —, quelles formes peut-on obtenir ? La réponse est étonnante : tout dessin composé de traits rectilignes, par exemple en forme de canard ou de papillon (voir l'encadré page ci-contre).

Ce magnifique résultat de la découpe unique (*fold-and-cut theorem*) est dû aux Canadiens Erik Demaine, Martin Demaine (le père du premier) et Anna Lubiw. Il a été démontré en 1999, et la démonstration constructive décrit un algorithme qui fournit les pliages à effectuer. Depuis, divers compléments ont été apportés à cette première démonstration, conduisant à deux méthodes différentes pour savoir quel pliage faire et quel coup de ciseaux donner quand on s'est fixé le motif à obtenir.

Parmi les problèmes de pliages les plus simples, il y a celui de savoir combien de fois on peut replier une feuille de papier (ou de tissu) sur elle-même en deux par le milieu. Le problème admet deux versions : soit on autorise des plis selon une seule direction et on partira alors de préférence d'une feuille très allongée, soit on s'autorise à plier la feuille en deux selon deux axes perpendiculaires.

Il se racontait, sans qu'on sache bien d'où venait l'affirmation, que huit était le maximum possible pour ce nombre de pliages successifs en deux. Une jeune Américaine, Britney Gallivan, s'est prise de passion pour le problème. Elle a réussi à la fois à proposer une formule mathématique intéressante aidant à comprendre le problème et à pousser le record de pliage bien au-delà de tout ce qu'on imaginait possible. Après avoir plié une feuille d'or 12 fois en deux sur elle-même selon deux directions, la jeune fille encore élève au collège se procura un rouleau de papier toilette de 1 200 mètres de long et put le replier en deux sur lui-même 12 fois de suite dans une même direction.

B. Gallivan a étudié soigneusement le problème physico-géométrique de ce type de pliages. Contrairement à ce qu'on serait tenté de penser, pour augmenter le record d'une unité avec une bande d'épaisseur fixée, il ne faut pas une bande deux fois plus longue, mais une bande environ quatre fois plus longue. En effet, quand on plie la bande déjà pliée, une partie notable de la bande sert à joindre les parties horizontales.

Pliages limités par l'épaisseur du papier

La formule démontrée par B. Gallivan pour la longueur L perdue dans ces morceaux servant à raccorder les parties horizontales du pliage est :

$$L = e \pi (2^n + 4) (2^n - 1) / 6,$$

où e est l'épaisseur du papier et n le nombre de plis effectués. On voit que L est à peu près quadruplée quand n augmente d'une unité.

Bien d'autres aspects du pliage sont aujourd'hui à l'étude. On découvre que derrière ces problèmes géométriques d'apparence simple se cachent des mathématiques merveilleuses concernant bien sûr la géométrie, mais aussi la théorie des nombres, l'algèbre, l'algorithmique et la théorie de la complexité. On est loin d'avoir fait le tour du sujet, qui prend une ampleur étonnante : les actes du congrès de 2011 sur l'origami, organisé par l'Université de Singapour, réunissent une cinquantaine de communications occupant 654 pages !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

R. Lang, *Origami Design Secrets, Mathematical Methods for an Ancient Art*, CRC Press (2^e édition), 2012.

J. O'Rourke, *How to Fold it, The Mathematics of Linkage, Origami and Polyhedra*, Cambridge University Press, 2011.

E. Demaine et J. O'Rourke, *Geometric Folding Algorithms*, Cambridge University Press, 2007.

R. Alperin et R. Lang, *One-, two, and multi-fold origami axioms*, *Origami*, vol. 4, pp. 371-393, 2006.

Références supplémentaires sur le site www.pourlascience.fr



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr