

Compter les excursions sur un échiquier

Alin Bostan et Kilian Raschel

Le dénombrement des chemins allant d'un point à un autre d'un réseau est un problème mathématique difficile. Illustration avec le cas des marches dites de Gessel, récemment résolu.

Imaginons un échiquier s'étendant à l'infini dans les directions Est et Nord. Supposons que le roi, un « roi biaisé », puisse se déplacer d'une case vers l'Est, l'Ouest, le Sud-Ouest ou le Nord-Est (voir la figure page 43). Si ce roi part du coin inférieur gauche de l'échiquier, combien existe-t-il de chemins possibles qui le font revenir à son point de départ en n coups, n étant un entier positif fixé ? En 2001, Ira Gessel, mathématicien de l'Université Brandeis aux États-Unis, conjectura une formule donnant ce nombre de possibilités en fonction de n .

Depuis l'énoncé de cette conjecture jusqu'à sa première preuve en 2008, qui utilisait de façon cruciale la puissance des ordinateurs, puis sa première démonstration purement humaine en 2013, beaucoup de mathématiciens se sont confrontés à ce problème par des approches très différentes.

Mais tout d'abord, pourquoi compter des chemins ? Depuis quand le faisons-nous ? Un

L'ESSENTIEL

■ Dénombrer des chemins sur un réseau périodique est un problème qui apparaît dans des domaines scientifiques variés.

■ Les situations où l'on a pu trouver une formule exacte sont rares.

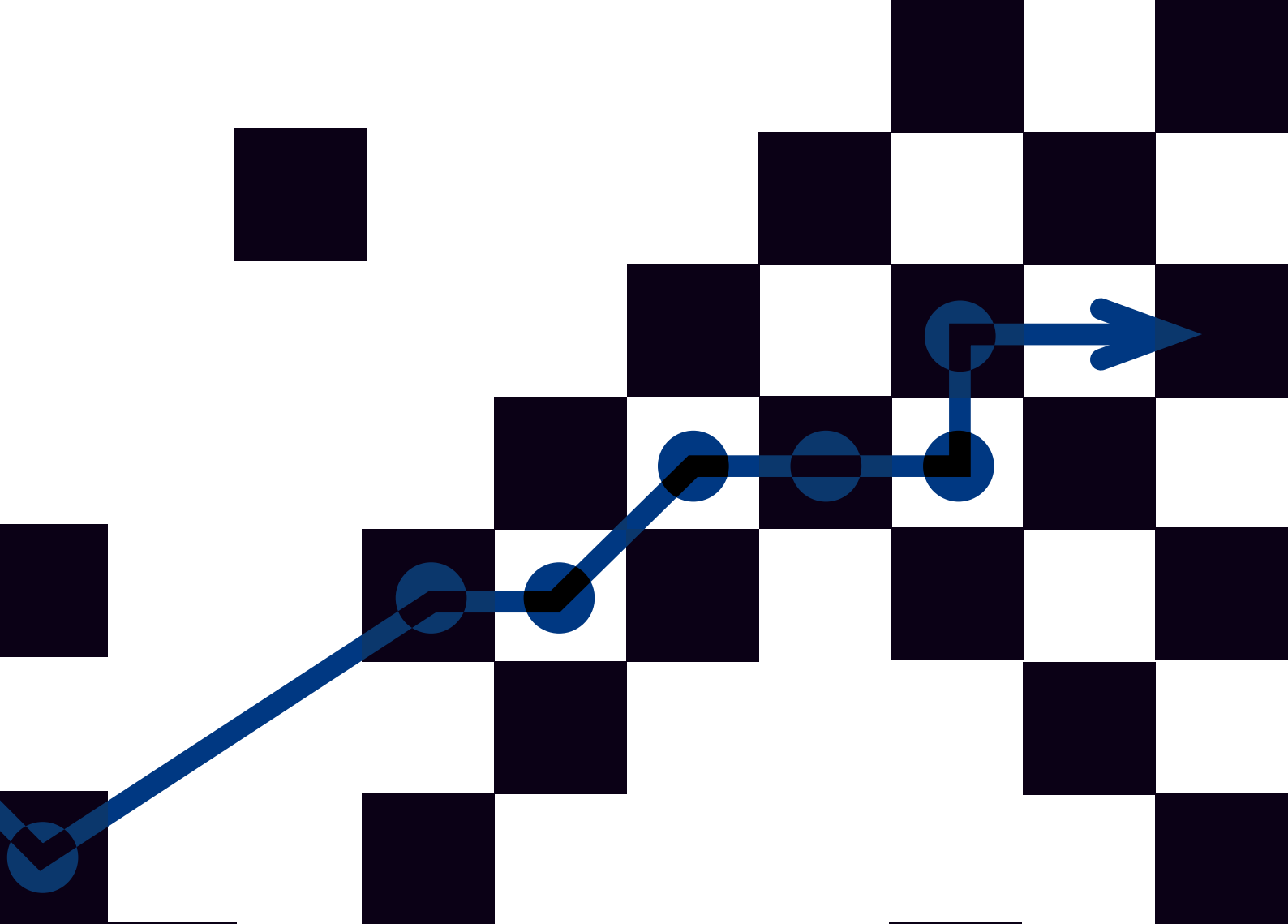
■ Pour un type de marches, une formule a été conjecturée par le mathématicien Ira Gessel en 2001.

■ Cette conjecture a été prouvée à l'aide de calculs par ordinateur en 2008, puis sans cette aide en 2013.

exemple historique est le problème de la partie interrompue (voir l'encadré page 42), posé au XVII^e siècle par le Chevalier de Méré à Blaise Pascal, et dont la solution proposée par ce dernier consiste à compter différents chemins (dans un « arbre de probabilités », dirait-on aujourd'hui en classe de terminale S).

Si c'est son application aux jeux de hasard qui intéressait le Chevalier de Méré, ce problème a une portée plus générale. Il était déjà apparu en Italie au XIV^e siècle, pour modéliser la rupture de contrats entre marchands associés dans une entreprise risquée.

Plus récemment, au XIX^e siècle, le dénombrement des chemins a permis de résoudre le « problème du scrutin » : lors du dépouillement (dans un ordre aléatoire) d'une élection avec deux candidats A et B, où A gagne avec un nombre de a votes sur un total de $(a + b)$ votes, quelle est la probabilité que A reste en tête tout au long du dépouillement ? On peut prouver par différentes méthodes que cette probabilité vaut $(a-b)/(a+b)$; or les deux démonstrations les



plus populaires utilisent des chemins.

Malgré ces exemples, le comptage des marches est longtemps resté l'apanage des mathématiques récréatives. Il a fallu attendre les années 1960 pour qu'il devienne une discipline à part entière, au carrefour des mathématiques, pures ou appliquées, parce qu'il utilise des méthodes variées : algébriques, combinatoires, analytiques, probabilistes, etc. Soulignons aussi que le dénombrement de chemins intervient dans de nombreux modèles (magnétisme, physique des polymères, etc.) étudiés en physique statistique.

Le cas particulier du comptage des chemins dans le plan est doublement important : d'abord pour lui-même, et aussi parce qu'il constitue un modèle-jouet, c'est-à-dire un exemple dont la complexité paraît maîtrisable, et qui aide à tester de nouvelles idées avant de traiter un cas plus général, en trois dimensions par exemple.

Le problème est le suivant. On considère le plan comme un réseau périodique

de points, on se fixe un ensemble de sauts possibles (les pas que la marche pourra suivre) et éventuellement de contraintes (par exemple, la marche ne doit pas toucher une certaine ligne) ; il s'agit alors de compter les chemins partant d'un point (disons l'origine du plan) et arrivant, après un nombre donné n de pas, en tel point ou dans tel domaine.

Dans la suite, on s'intéressera surtout au nombre e_n d'excursions de longueur n , c'est-à-dire de chemins formés de n pas partant de l'origine et y revenant. Pour les chemins non contraints, ce problème est facile et sa solution est connue depuis longtemps. Quant aux chemins contraints, différents cas ont été explorés : ne pas toucher une ligne, rester dans un demi-plan, dans un quart de plan, dans une région du plan avec des contours plus compliqués, etc. En fait, il existe une infinité d'exemples possibles. Dans la plupart des cas, le problème est hors de portée ; c'est pourquoi on se restreint souvent à la classe particulière des marches à petits sauts – composées

**En géométrie,
il n'y a pas de chemin
réservé aux rois.**

Euclide