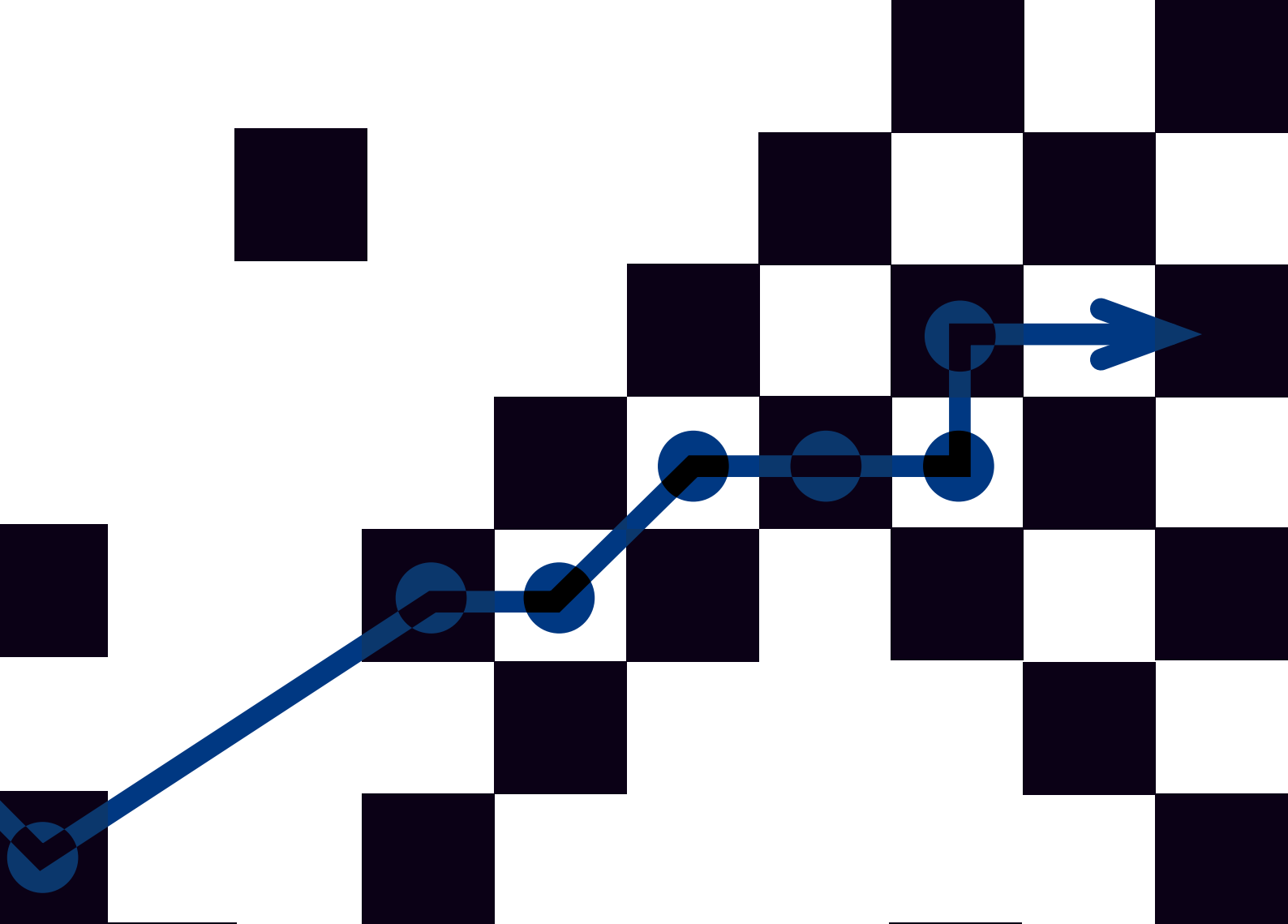




plus populaires utilisent des chemins.

Malgré ces exemples, le comptage des marches est longtemps resté l'apanage des mathématiques récréatives. Il a fallu attendre les années 1960 pour qu'il devienne une discipline à part entière, au carrefour des mathématiques, pures ou appliquées, parce qu'il utilise des méthodes variées : algébriques, combinatoires, analytiques, probabilistes, etc. Soulignons aussi que le dénombrement de chemins intervient dans de nombreux modèles (magnétisme, physique des polymères, etc.) étudiés en physique statistique.

Le cas particulier du comptage des chemins dans le plan est doublement important : d'abord pour lui-même, et aussi parce qu'il constitue un modèle-jouet, c'est-à-dire un exemple dont la complexité paraît maîtrisable, et qui aide à tester de nouvelles idées avant de traiter un cas plus général, en trois dimensions par exemple.

Le problème est le suivant. On considère le plan comme un réseau périodique

de points, on se fixe un ensemble de sauts possibles (les pas que la marche pourra suivre) et éventuellement de contraintes (par exemple, la marche ne doit pas toucher une certaine ligne) ; il s'agit alors de compter les chemins partant d'un point (disons l'origine du plan) et arrivant, après un nombre donné n de pas, en tel point ou dans tel domaine.

Dans la suite, on s'intéressera surtout au nombre e_n d'excursions de longueur n , c'est-à-dire de chemins formés de n pas partant de l'origine et y revenant. Pour les chemins non contraints, ce problème est facile et sa solution est connue depuis longtemps. Quant aux chemins contraints, différents cas ont été explorés : ne pas toucher une ligne, rester dans un demi-plan, dans un quart de plan, dans une région du plan avec des contours plus compliqués, etc. En fait, il existe une infinité d'exemples possibles. Dans la plupart des cas, le problème est hors de portée ; c'est pourquoi on se restreint souvent à la classe particulière des marches à petits sauts – composées

**En géométrie,
il n'y a pas de chemin
réservé aux rois.**

Euclide

Le problème de la partie interrompue

Deux joueurs jouent à pile ou face, le gagnant étant celui qui remporte trois parties ; chacun a misé au départ la même somme d'argent m .

On suppose que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait remporté trois victoires et, de ce fait, la totalité des mises, soit $2m$.

Comment, dans ces circonstances, doit-on partager cette somme ?

La solution proposée par Pascal consiste à compter les chemins, au sens d'énumérer les différentes possibilités.

Supposons que le jeu s'arrête alors qu'un des joueurs a gagné deux parties et l'autre une seule partie (situation notée $2/1$). Si le jeu avait continué, il y aurait eu deux possibilités : la situation $2/2$, pour

laquelle il aurait été équitable de partager équitablement la mise (chacun m), et la situation $3/1$, pour laquelle le premier joueur aurait tout emporté ($2m$). En faisant la moyenne (chaque événement étant équiprobable) on trouve qu'il est légitime que le premier joueur gagne $3m/2$ et le deuxième $m/2$.

On procède de façon analogue si la situation initiale est différente de $2/1$.

uniquement de déplacements aux plus proches voisins – dans des domaines angulaires simples.

L'un des premiers exemples est la marche dite de Kreweras, où les déplacements se font dans un quadrant (un quart de plan) et uniquement dans les directions Ouest, Sud et Nord-Est (voir la figure page 45). Cette marche tire son nom du mathématicien français Germain Kreweras (1918-1998) qui, en 1965, parvint (en une preuve longue de plusieurs dizaines de pages !) à compter les excursions : il prouva que $e_{3n} = 4^n / [(n+1)(2n+1)] C_{3n}^n$, où les $C_p^k = p! / [k!(p-k)!]$ sont les coefficients du binôme, c'est-à-dire les coefficients de $x^k y^{p-k}$ dans le développement de $(x+y)^p$.

Une formule qui compte

Un autre cas particulier populaire est la marche dite simple, où les directions des pas sont les quatre points cardinaux : en 1921, le Hongrois George Pólya montra que, sur un échiquier infini dans toutes les directions, la probabilité qu'un roi exécutant une marche simple retourne à la case départ au bout d'un nombre fini de pas est égale à 1. Il existe aussi des formules pour le nombre d'excursions restreintes à un demi-plan ou à un quart de plan (voir la figure page 46). Et en 1986, Dominique Gouyou-Beauchamps, informaticien à l'Université Paris-Sud, obtint une formule pour le domaine angulaire d'ouverture 45° , domaine qui se ramène au quart de plan par une transformation simple.

C'est dans ce contexte que Ira Gessel énonça sa conjecture. Selon celle-ci, le

nombre de possibilités pour que le roi biaisé parte du coin inférieur gauche de l'échiquier et y revienne après $2n$ étapes (il ne peut revenir à l'origine en un nombre impair de pas) est égal à $e_{2n} = 4^n A_n B_n$, où $A_n = (2-5/5)(2-5/8)(2-5/11) \dots [2-5/(3n+2)]$ et $B_n = (2-3/2)(2-3/3)(2-3/4) \dots [2-3/(n+1)]$. (Le fait même que le produit $4^n A_n B_n$ soit un nombre entier n'est pas une évidence !)

Par exemple, pour $n = 1$, ce nombre vaut $e_2 = 4^1 (2-5/5)(2-3/2) = 2$. Pour $n = 2$, on obtient :

$e_4 = 4^2 (2-5/5)(2-5/8)(2-3/2)(2-3/3) = 11$. Et pour $n = 3$, la même formule donne $e_6 = 85$.

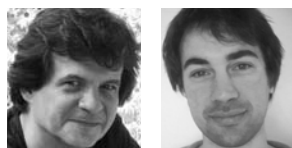
On peut retrouver ces résultats relatifs aux petites valeurs de n en énumérant de façon exhaustive, sur un dessin, les chemins. Notons par ailleurs qu'on peut voir la marche de Gessel comme la marche simple dans un domaine d'angle égal à 135° (voir la figure page 46) ; c'est ainsi que Ira Gessel parvint à sa conjecture.

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés à la question de trouver des formules qui comptent certains chemins dans le plan. Une telle formule n'existant pas toujours, on peut alors poser une autre question, d'ordre plus qualitatif. Les nombres d'excursions e_n satisfont-ils une relation de récurrence (voir l'encadré page 43) ? Une telle relation entre des nombres permet souvent de mieux les connaître et les calculer, ou d'en trouver des approximations utiles.

Kreweras a montré que les excursions de la marche éponyme satisfont à une équation de récurrence linéaire ; d'autres marches présentent aussi cette propriété. Mais ce n'est pas toujours le cas, comme l'ont montré en 2003 Mireille Bousquet-Mélou, de l'Université de Bordeaux, et Marko Petkovšek, de l'Université de Lubiana en Slovénie, sur l'exemple du déplacement d'un cavalier aux échecs sur un échiquier s'étendant à l'infini dans les directions Est et Nord. À l'époque où Ira Gessel a énoncé sa conjecture, la plupart des spécialistes de combinatoire pensaient que les nombres d'excursions de Gessel ne vérifient pas de relation de récurrence linéaire.

En avril 2001, Ira Gessel partagea sa conjecture pour la première fois, en l'envoyant par courriel à Mireille Bousquet-Mélou. Cette dernière s'intéressait à l'époque aux marches dans un quart de plan, en lien avec la question de l'existence de relations de récurrence. Un peu plus

LES AUTEURS



Alin BOSTAN est chercheur à l'Inria, à Saclay près de Paris. Kilian RASCHEL est chercheur au CNRS et travaille au Laboratoire de mathématiques et physique théorique à l'Université de Tours.