

Le problème de la partie interrompue

Deux joueurs jouent à pile ou face, le gagnant étant celui qui remporte trois parties ; chacun a misé au départ la même somme d'argent m .

On suppose que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait remporté trois victoires et, de ce fait, la totalité des mises, soit $2m$.

Comment, dans ces circonstances, doit-on partager cette somme ?

La solution proposée par Pascal consiste à compter les chemins, au sens d'énumérer les différentes possibilités.

Supposons que le jeu s'arrête alors qu'un des joueurs a gagné deux parties et l'autre une seule partie (situation notée $2/1$). Si le jeu avait continué, il y aurait eu deux possibilités : la situation $2/2$, pour

laquelle il aurait été équitable de partager équitablement la mise (chacun m), et la situation $3/1$, pour laquelle le premier joueur aurait tout emporté ($2m$). En faisant la moyenne (chaque événement étant équiprobable) on trouve qu'il est légitime que le premier joueur gagne $3m/2$ et le deuxième $m/2$.

On procède de façon analogue si la situation initiale est différente de $2/1$.

uniquement de déplacements aux plus proches voisins – dans des domaines angulaires simples.

L'un des premiers exemples est la marche dite de Kreweras, où les déplacements se font dans un quadrant (un quart de plan) et uniquement dans les directions Ouest, Sud et Nord-Est (voir la figure page 45). Cette marche tire son nom du mathématicien français Germain Kreweras (1918-1998) qui, en 1965, parvint (en une preuve longue de plusieurs dizaines de pages !) à compter les excursions : il prouva que $e_{3n} = 4^n / [(n+1)(2n+1)] C_{3n}^n$, où les $C_p^k = p! / [k!(p-k)!]$ sont les coefficients du binôme, c'est-à-dire les coefficients de $x^k y^{p-k}$ dans le développement de $(x+y)^p$.

Une formule qui compte

Un autre cas particulier populaire est la marche dite simple, où les directions des pas sont les quatre points cardinaux : en 1921, le Hongrois George Pólya montra que, sur un échiquier infini dans toutes les directions, la probabilité qu'un roi exécutant une marche simple retourne à la case départ au bout d'un nombre fini de pas est égale à 1. Il existe aussi des formules pour le nombre d'excursions restreintes à un demi-plan ou à un quart de plan (voir la figure page 46). Et en 1986, Dominique Gouyou-Beauchamps, informaticien à l'Université Paris-Sud, obtint une formule pour le domaine angulaire d'ouverture 45° , domaine qui se ramène au quart de plan par une transformation simple.

C'est dans ce contexte que Ira Gessel énonça sa conjecture. Selon celle-ci, le

nombre de possibilités pour que le roi biaisé parte du coin inférieur gauche de l'échiquier et y revienne après $2n$ étapes (il ne peut revenir à l'origine en un nombre impair de pas) est égal à $e_{2n} = 4^n A_n B_n$, où $A_n = (2-5/5)(2-5/8)(2-5/11) \dots [2-5/(3n+2)]$ et $B_n = (2-3/2)(2-3/3)(2-3/4) \dots [2-3/(n+1)]$. (Le fait même que le produit $4^n A_n B_n$ soit un nombre entier n'est pas une évidence !)

Par exemple, pour $n=1$, ce nombre vaut $e_2 = 4^1 (2-5/5)(2-3/2) = 2$. Pour $n=2$, on obtient :

$e_4 = 4^2 (2-5/5)(2-5/8)(2-3/2)(2-3/3) = 11$. Et pour $n=3$, la même formule donne $e_6 = 85$.

On peut retrouver ces résultats relatifs aux petites valeurs de n en énumérant de façon exhaustive, sur un dessin, les chemins. Notons par ailleurs qu'on peut voir la marche de Gessel comme la marche simple dans un domaine d'angle égal à 135° (voir la figure page 46) ; c'est ainsi que Ira Gessel parvint à sa conjecture.

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés à la question de trouver des formules qui comptent certains chemins dans le plan. Une telle formule n'existant pas toujours, on peut alors poser une autre question, d'ordre plus qualitatif. Les nombres d'excursions e_n satisfont-ils une relation de récurrence (voir l'encadré page 43) ? Une telle relation entre des nombres permet souvent de mieux les connaître et les calculer, ou d'en trouver des approximations utiles.

Kreweras a montré que les excursions de la marche éponyme satisfont à une équation de récurrence linéaire ; d'autres marches présentent aussi cette propriété. Mais ce n'est pas toujours le cas, comme l'ont montré en 2003 Mireille Bousquet-Mélou, de l'Université de Bordeaux, et Marko Petkovšek, de l'Université de Lubiana en Slovénie, sur l'exemple du déplacement d'un cavalier aux échecs sur un échiquier s'étendant à l'infini dans les directions Est et Nord. À l'époque où Ira Gessel a énoncé sa conjecture, la plupart des spécialistes de combinatoire pensaient que les nombres d'excursions de Gessel ne vérifient pas de relation de récurrence linéaire.

En avril 2001, Ira Gessel partagea sa conjecture pour la première fois, en l'envoyant par courriel à Mireille Bousquet-Mélou. Cette dernière s'intéressait à l'époque aux marches dans un quart de plan, en lien avec la question de l'existence de relations de récurrence. Un peu plus

LES AUTEURS



Alin BOSTAN est chercheur à l'Inria, à Saclay près de Paris. Kilian RASCHEL est chercheur au CNRS et travaille au Laboratoire de mathématiques et physique théorique à l'Université de Tours.