

Le problème de la partie interrompue

Deux joueurs jouent à pile ou face, le gagnant étant celui qui remporte trois parties ; chacun a misé au départ la même somme d'argent m .

On suppose que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait remporté trois victoires et, de ce fait, la totalité des mises, soit $2m$.

Comment, dans ces circonstances, doit-on partager cette somme ?

La solution proposée par Pascal consiste à compter les chemins, au sens d'énumérer les différentes possibilités.

Supposons que le jeu s'arrête alors qu'un des joueurs a gagné deux parties et l'autre une seule partie (situation notée $2/1$). Si le jeu avait continué, il y aurait eu deux possibilités : la situation $2/2$, pour

laquelle il aurait été équitable de partager équitablement la mise (chacun m), et la situation $3/1$, pour laquelle le premier joueur aurait tout emporté ($2m$). En faisant la moyenne (chaque événement étant équiprobable) on trouve qu'il est légitime que le premier joueur gagne $3m/2$ et le deuxième $m/2$.

On procède de façon analogue si la situation initiale est différente de $2/1$.

uniquement de déplacements aux plus proches voisins – dans des domaines angulaires simples.

L'un des premiers exemples est la marche dite de Kreweras, où les déplacements se font dans un quadrant (un quart de plan) et uniquement dans les directions Ouest, Sud et Nord-Est (voir la figure page 45). Cette marche tire son nom du mathématicien français Germain Kreweras (1918-1998) qui, en 1965, parvint (en une preuve longue de plusieurs dizaines de pages !) à compter les excursions : il prouva que $e_{3n} = 4^n / [(n+1)(2n+1)] C_{3n}^n$, où les $C_p^k = p! / [k!(p-k)!]$ sont les coefficients du binôme, c'est-à-dire les coefficients de $x^k y^{p-k}$ dans le développement de $(x+y)^p$.

Une formule qui compte

Un autre cas particulier populaire est la marche dite simple, où les directions des pas sont les quatre points cardinaux : en 1921, le Hongrois George Pólya montra que, sur un échiquier infini dans toutes les directions, la probabilité qu'un roi exécutant une marche simple retourne à la case départ au bout d'un nombre fini de pas est égale à 1. Il existe aussi des formules pour le nombre d'excursions restreintes à un demi-plan ou à un quart de plan (voir la figure page 46). Et en 1986, Dominique Gouyou-Beauchamps, informaticien à l'Université Paris-Sud, obtint une formule pour le domaine angulaire d'ouverture 45° , domaine qui se ramène au quart de plan par une transformation simple.

C'est dans ce contexte que Ira Gessel énonça sa conjecture. Selon celle-ci, le

nombre de possibilités pour que le roi biaisé parte du coin inférieur gauche de l'échiquier et y revienne après $2n$ étapes (il ne peut revenir à l'origine en un nombre impair de pas) est égal à $e_{2n} = 4^n A_n B_n$, où $A_n = (2-5/5)(2-5/8)(2-5/11) \dots [2-5/(3n+2)]$ et $B_n = (2-3/2)(2-3/3)(2-3/4) \dots [2-3/(n+1)]$. (Le fait même que le produit $4^n A_n B_n$ soit un nombre entier n'est pas une évidence !)

Par exemple, pour $n=1$, ce nombre vaut $e_2 = 4^1 (2-5/5)(2-3/2) = 2$. Pour $n=2$, on obtient :

$e_4 = 4^2 (2-5/5)(2-5/8)(2-3/2)(2-3/3) = 11$. Et pour $n=3$, la même formule donne $e_6 = 85$.

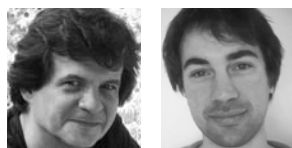
On peut retrouver ces résultats relatifs aux petites valeurs de n en énumérant de façon exhaustive, sur un dessin, les chemins. Notons par ailleurs qu'on peut voir la marche de Gessel comme la marche simple dans un domaine d'angle égal à 135° (voir la figure page 46) ; c'est ainsi que Ira Gessel parvint à sa conjecture.

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés à la question de trouver des formules qui comptent certains chemins dans le plan. Une telle formule n'existant pas toujours, on peut alors poser une autre question, d'ordre plus qualitatif. Les nombres d'excursions e_n satisfont-ils une relation de récurrence (voir l'encadré page 43) ? Une telle relation entre des nombres permet souvent de mieux les connaître et les calculer, ou d'en trouver des approximations utiles.

Kreweras a montré que les excursions de la marche éponyme satisfont à une équation de récurrence linéaire ; d'autres marches présentent aussi cette propriété. Mais ce n'est pas toujours le cas, comme l'ont montré en 2003 Mireille Bousquet-Mélou, de l'Université de Bordeaux, et Marko Petkovšek, de l'Université de Lubiana en Slovénie, sur l'exemple du déplacement d'un cavalier aux échecs sur un échiquier s'étendant à l'infini dans les directions Est et Nord. À l'époque où Ira Gessel a énoncé sa conjecture, la plupart des spécialistes de combinatoire pensaient que les nombres d'excursions de Gessel ne vérifient pas de relation de récurrence linéaire.

En avril 2001, Ira Gessel partagea sa conjecture pour la première fois, en l'envoyant par courriel à Mireille Bousquet-Mélou. Cette dernière s'intéressait à l'époque aux marches dans un quart de plan, en lien avec la question de l'existence de relations de récurrence. Un peu plus

LES AUTEURS



Alin BOSTAN est chercheur à l'Inria, à Saclay près de Paris. Kilian RASCHEL est chercheur au CNRS et travaille au Laboratoire de mathématiques et physique théorique à l'Université de Tours.

tard, en 2002, elle posa les fondements d'une approche permettant de compter les marches dans un quart de plan au moyen de « fonctions génératrices » – fonctions qui, lorsqu'on les exprime sous forme de séries, codent les informations recherchées dans les coefficients de ces séries (voir l'encadré page 44). Ainsi, la fonction génératrice des excursions a pour développement une série dont les coefficients correspondent aux nombres d'excursions e_n pour toutes les valeurs de n .

Équation fonctionnelle

L'approche de Mireille Bousquet-Mélou est fondée sur une équation, dite fonctionnelle, assez simple satisfaite par la fonction génératrice et qui traduit la décomposition naturelle de toute marche de longueur $(n+1)$ en une marche de longueur n à laquelle s'ajoute un dernier pas. Le cœur du travail consistait notamment à déterminer la fonction génératrice à partir de l'équation fonctionnelle qu'elle doit satisfaire. Cette approche s'est révélée la bonne : toutes les autres utilisent comme point de départ les fonctions génératrices et l'équation fonctionnelle.

Mireille Bousquet-Mélou et Marni Mishna, de l'Université Simon Fraser au Canada, ont alors entrepris une étude systématique des marches à petits sauts dans un quadrant. Il existe *a priori* $2^8 = 256$ modèles, car on peut choisir d'inclure ou non chacun des huit plus proches voisins comme pas intervenant dans la marche (soit deux choix possibles par proche voisin). Les deux chercheuses ont d'abord montré qu'en fait, seuls 79 des 256 modèles sont intrinsèques au quart de plan et sont fondamentalement différents. En effet, certains des $256 - 79 = 177$ modèles restants sont triviaux (tel celui de la marche immobile), d'autres sont symétriques entre eux et, enfin, certains sont équivalents à des modèles de marches évoluant dans un demi-plan, bien compris depuis des travaux antérieurs.

Les études de Mireille Bousquet-Mélou et Marni Mishna se sont ainsi conclues par un article fondateur de la combinatoire des marches dans un quart de plan, qui résout 22 des 79 cas irréductibles. Pourquoi 22 ? Parmi les 79 cas, 23 (dont la marche simple, celles de Kreweras, de Gouyou-Beauchamps, de Gessel) sont particuliers au sens où un certain groupe, structure algébrique qui traduit généralement une certaine symétrie

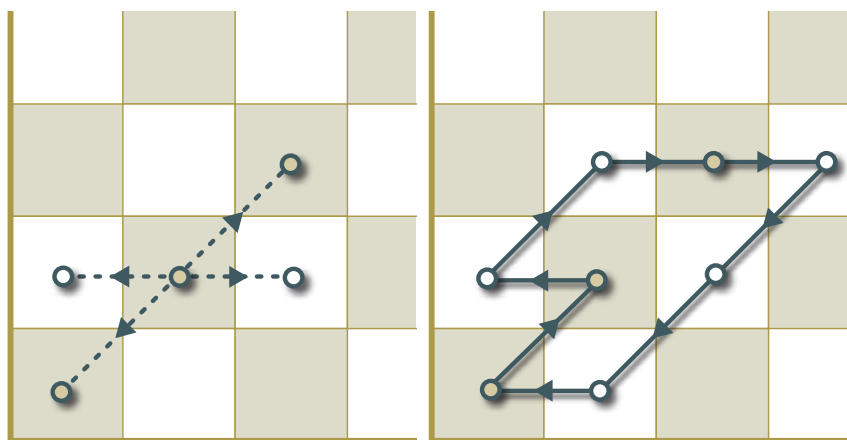
du modèle, est fini (c'est-à-dire constitué d'un nombre fini d'éléments). L'unique cas non résolu et associé à un groupe fini était précisément celui de la marche de Gessel !

L'histoire de la résolution de la conjecture de Gessel débute le 28 janvier 2008, lors d'un séminaire organisé par l'équipe

Algorithms de l'Inria à Rocquencourt, et auquel participaient Marni Mishna et Manuel Kauers, postdoctorant à l'époque. Ce dernier y mentionna des avancées récentes, obtenues en

collaboration avec Doron Zeilberger, de l'Université Rutgers aux États-Unis, sur une approche par ordinateur consistant à deviner et prouver automatiquement des équations de récurrence.

La marche de Gessel était le dernier cas non résolu d'une famille de 23 marches associées à un groupe fini.



POUR LES MARCHES DE GESSEL, les déplacements élémentaires autorisés sont d'une case vers l'Est, l'Ouest, le Nord-Est ou le Sud-Ouest (à gauche). La conjecture de Gessel portait sur le nombre e_n d'excursions en fonction du nombre n de pas (à droite, une excursion de huit pas).

Les suites récurrentes

Une suite définie par récurrence est une suite donnée par son premier terme (ou quelques-uns de ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme à partir du précédent (ou des quelques précédents).

L'ordre de la suite récurrente est le nombre de termes précédents dont on a besoin. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = 16^n$ est récurrente d'ordre 1, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 16 u_n$. Un exemple légèrement plus complexe est la suite (v_n) définie par

$v_0 = 1$ et $v_{n+1} = (n+1)v_n$ (d'ordre 1 également). La solution est ici la factorielle, notée $n!$, qui est le produit de tous les entiers allant de 1 à n . Un dernier exemple célèbre est la suite de Fibonacci (w_n) , définie par $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$

(récurrence d'ordre 2). Rappelons que cette suite est reliée au nombre d'or $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, car on peut montrer que $w_n = (\phi^n - (-1/\phi)^n)/\sqrt{5}$. Les suites récurrentes vérifiées par les nombres de marches évoquées dans cet article peuvent être d'ordre bien supérieur à 1 ou 2.

Un site web impressionnant, contenant des centaines de milliers de suites apparaissant en combinatoire, est l'encyclopédie en ligne de Neil Sloane (www.oeis.org).