

tard, en 2002, elle posa les fondements d'une approche permettant de compter les marches dans un quart de plan au moyen de « fonctions génératrices » – fonctions qui, lorsqu'on les exprime sous forme de séries, codent les informations recherchées dans les coefficients de ces séries (voir l'encadré page 44). Ainsi, la fonction génératrice des excursions a pour développement une série dont les coefficients correspondent aux nombres d'excursions e_n pour toutes les valeurs de n .

Équation fonctionnelle

L'approche de Mireille Bousquet-Mélou est fondée sur une équation, dite fonctionnelle, assez simple satisfaite par la fonction génératrice et qui traduit la décomposition naturelle de toute marche de longueur $(n+1)$ en une marche de longueur n à laquelle s'ajoute un dernier pas. Le cœur du travail consistait notamment à déterminer la fonction génératrice à partir de l'équation fonctionnelle qu'elle doit satisfaire. Cette approche s'est révélée la bonne : toutes les autres utilisent comme point de départ les fonctions génératrices et l'équation fonctionnelle.

Mireille Bousquet-Mélou et Marni Mishna, de l'Université Simon Fraser au Canada, ont alors entrepris une étude systématique des marches à petits sauts dans un quadrant. Il existe *a priori* $2^8 = 256$ modèles, car on peut choisir d'inclure ou non chacun des huit plus proches voisins comme pas intervenant dans la marche (soit deux choix possibles par proche voisin). Les deux chercheuses ont d'abord montré qu'en fait, seuls 79 des 256 modèles sont intrinsèques au quart de plan et sont fondamentalement différents. En effet, certains des $256 - 79 = 177$ modèles restants sont triviaux (tel celui de la marche immobile), d'autres sont symétriques entre eux et, enfin, certains sont équivalents à des modèles de marches évoluant dans un demi-plan, bien compris depuis des travaux antérieurs.

Les études de Mireille Bousquet-Mélou et Marni Mishna se sont ainsi conclues par un article fondateur de la combinatoire des marches dans un quart de plan, qui résout 22 des 79 cas irréductibles. Pourquoi 22 ? Parmi les 79 cas, 23 (dont la marche simple, celles de Kreweras, de Gouyou-Beauchamps, de Gessel) sont particuliers au sens où un certain groupe, structure algébrique qui traduit généralement une certaine symétrie

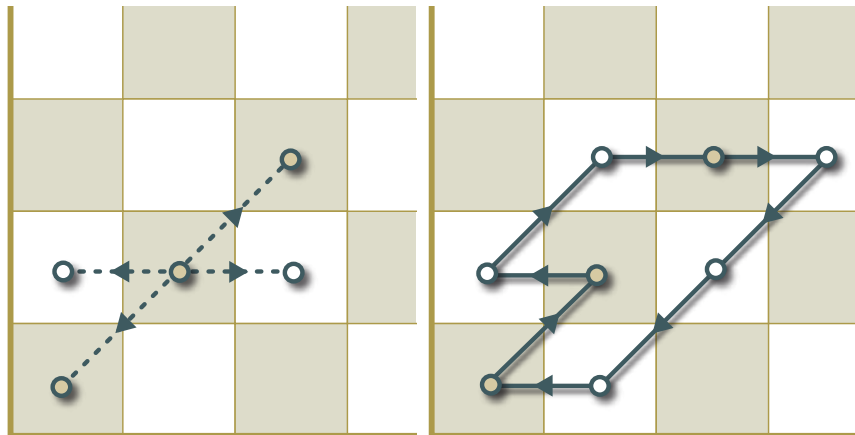
du modèle, est fini (c'est-à-dire constitué d'un nombre fini d'éléments). L'unique cas non résolu et associé à un groupe fini était précisément celui de la marche de Gessel !

L'histoire de la résolution de la conjecture de Gessel débute le 28 janvier 2008, lors d'un séminaire organisé par l'équipe

Algorithms de l'Inria à Rocquencourt, et auquel participaient Marni Mishna et Manuel Kauers, postdoctorant à l'époque. Ce dernier y mentionna des avancées récentes, obtenues en

collaboration avec Doron Zeilberger, de l'Université Rutgers aux États-Unis, sur une approche par ordinateur consistant à deviner et prouver automatiquement des équations de récurrence.

La marche de Gessel était le dernier cas non résolu d'une famille de 23 marches associées à un groupe fini.



POUR LES MARCHES DE GESSEL, les déplacements élémentaires autorisés sont d'une case vers l'Est, l'Ouest, le Nord-Est ou le Sud-Ouest (à gauche). La conjecture de Gessel portait sur le nombre e_n d'excursions en fonction du nombre n de pas (à droite, une excursion de huit pas).

Les suites récurrentes

Une suite définie par récurrence est une suite donnée par son premier terme (ou quelques-uns de ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme à partir du précédent (ou des quelques précédents).

L'ordre de la suite récurrente est le nombre de termes précédents dont on a besoin. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = 16^n$ est récurrente d'ordre 1, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 16 u_n$. Un exemple légèrement plus complexe est la suite (v_n) définie par

$v_0 = 1$ et $v_{n+1} = (n+1)v_n$ (d'ordre 1 également). La solution est ici la factorielle, notée $n!$, qui est le produit de tous les entiers allant de 1 à n . Un dernier exemple célèbre est la suite de Fibonacci (w_n) , définie par $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$

(récurrence d'ordre 2).

Rappelons que cette suite est reliée au nombre d'or $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, car on peut montrer que $w_n = (\phi^n - (-1/\phi)^n)/\sqrt{5}$. Les suites récurrentes vérifiées par les nombres de marches évoquées dans cet article peuvent être d'ordre bien supérieur à 1 ou 2.

Un site web impressionnant, contenant des centaines de milliers de suites apparaissant en combinatoire, est l'encyclopédie en ligne de Neil Sloane (www.oeis.org).

Séries et fonctions génératrices

Une série génératrice est une « somme infinie » (plus rigoureusement, une *série formelle*)

$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ dont les coefficients a_n constituent la suite de nombres que l'on recherche ; on dit que la série S est associée à la suite (a_n) , ou que S est sa série génératrice.

Ces séries furent introduites par le mathématicien français Abraham de Moivre en 1730, afin d'obtenir des formules explicites pour des suites définies par récurrence.

Il est souvent possible d'étudier une suite donnée à l'aide de manipulations formelles de la série génératrice S associée, ainsi qu'en utilisant les propriétés de la fonction $f(x)$ qui représente la somme de la série S .

À titre d'exemple, précisons la fonction génératrice de chacune des trois suites mentionnées dans l'encadré portant sur les suites récurrentes (voir page 43), à savoir les suites de terme général égal respectivement à $u_n = 16^n$, $v_n = n!$ et $w_n = (\phi^n - (-1/\phi)^n)/\sqrt{5}$ (suite de Fibonacci).

Pour la suite (u_n) , il s'agit de $f(x) = 1/(1 - 16x)$, car une écriture alternative

de $1/(1 - 16x)$ est $1 + 16x + 16^2 x^2 + 16^3 x^3 + \dots$, qui est la série génératrice de (u_n) (on a utilisé l'identité $1/(1-a) = 1 + a + a^2 + \dots$, valable pour tout nombre a de valeur absolue inférieure à 1).

La fonction génératrice de $(1/v_n) = (1/n!)$ – qui est plus remarquable et facile à définir que celle de (v_n) – est la fonction exponentielle $f(x) = e^x$, dont le développement en série est en effet $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$

Enfin, la série génératrice des nombres de Fibonacci s'obtient en développant en série de puissances de x la fonction $f(x) = x/(1 - x - x^2)$.

Voici sur un exemple simple le principe de cette approche : si l'on nous donne six termes d'une suite, par exemple 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 (ce sont les premiers termes de la suite de Fibonacci, voir l'encadré page 43), et que l'on nous dit par ailleurs que cette suite vérifie une équation de récurrence d'ordre 2 (à coefficients constants), l'ordinateur propose une unique possibilité : la récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

100 dollars pour prouver en moins de cinq pages

En général, on ne dispose pas d'autant d'informations sur la suite que l'on désire reconstituer grâce à ses premiers termes. En particulier, l'ordre de la récurrence est une inconnue, et le trouver complique beaucoup la méthode. Mais Manuel Kauers et Doron Zeilberger ont surmonté cette difficulté et ont pu appliquer la méthode à la marche de Kreweras. Cette approche ne fonctionnait malheureusement pas pour la marche de Gessel, les calculs impliqués dépassant les capacités des ordinateurs ;



les conférences

à la Cité des sciences et de l'industrie

Entrée libre dans la limite des places disponibles

THÈME (Des)équilibres

> les mardis 3, 10, 17, 24 mars à 19h

Cycle de 4 conférences

L'équilibre : un sens renversant

Comment l'homme est devenu bipède ?
 Comment son anatomie s'est modifiée ?
 Comment le cerveau veille à l'équilibre ?
 Comment des danseurs le défient ?

Avec : Pierre Denise, Laura de Nercy, Kitsou Dubois, Christophe Lopez, Brigitte Senut, Christine Tardieu.

programme complet sur cite-sciences.fr

Avec soutien de

SCIENCE 