

Séries et fonctions génératrices

Une série génératrice est une « somme infinie » (plus rigoureusement, une *série formelle*)

$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ dont les coefficients a_n constituent la suite de nombres que l'on recherche ; on dit que la série S est associée à la suite (a_n) , ou que S est sa série génératrice.

Ces séries furent introduites par le mathématicien français Abraham de Moivre en 1730, afin d'obtenir des formules explicites pour des suites définies par récurrence.

Il est souvent possible d'étudier une suite donnée à l'aide de manipulations formelles de la série génératrice S associée, ainsi qu'en utilisant les propriétés de la fonction $f(x)$ qui représente la somme de la série S .

À titre d'exemple, précisons la fonction génératrice de chacune des trois suites mentionnées dans l'encadré portant sur les suites récurrentes (voir page 43), à savoir les suites de terme général égal respectivement à $u_n = 16^n$, $v_n = n!$ et $w_n = (\phi^n - (-1/\phi)^n)/\sqrt{5}$ (suite de Fibonacci).

Pour la suite (u_n) , il s'agit de $f(x) = 1/(1 - 16x)$, car une écriture alternative

de $1/(1 - 16x)$ est $1 + 16x + 16^2 x^2 + 16^3 x^3 + \dots$, qui est la série génératrice de (u_n) (on a utilisé l'identité $1/(1-a) = 1 + a + a^2 + \dots$, valable pour tout nombre a de valeur absolue inférieure à 1).

La fonction génératrice de $(1/v_n) = (1/n!)$ – qui est plus remarquable et facile à définir que celle de (v_n) – est la fonction exponentielle $f(x) = e^x$, dont le développement en série est en effet $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$

Enfin, la série génératrice des nombres de Fibonacci s'obtient en développant en série de puissances de x la fonction $f(x) = x/(1 - x - x^2)$.

Voici sur un exemple simple le principe de cette approche : si l'on nous donne six termes d'une suite, par exemple 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 (ce sont les premiers termes de la suite de Fibonacci, voir l'encadré page 43), et que l'on nous dit par ailleurs que cette suite vérifie une équation de récurrence d'ordre 2 (à coefficients constants), l'ordinateur propose une unique possibilité : la récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

100 dollars pour prouver en moins de cinq pages

En général, on ne dispose pas d'autant d'informations sur la suite que l'on désire reconstituer grâce à ses premiers termes. En particulier, l'ordre de la récurrence est une inconnue, et le trouver complique beaucoup la méthode. Mais Manuel Kauers et Doron Zeilberger ont surmonté cette difficulté et ont pu appliquer la méthode à la marche de Kreweras. Cette approche ne fonctionnait malheureusement pas pour la marche de Gessel, les calculs impliqués dépassant les capacités des ordinateurs ;



les conférences

à la Cité des sciences et de l'industrie

THÈME (Des)équilibres

> les mardis 3, 10, 17, 24 mars à 19h

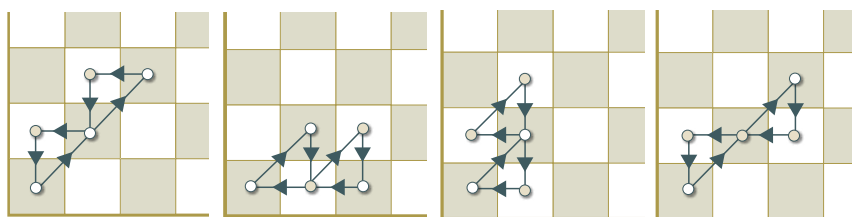
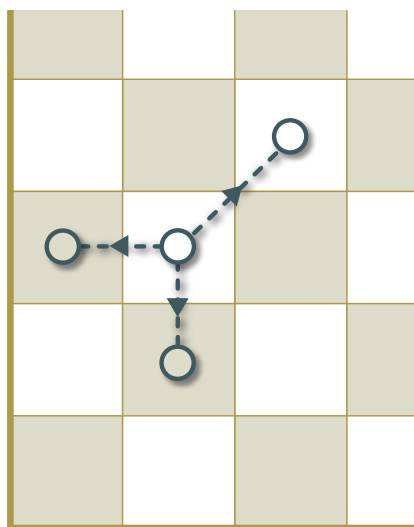
Entrée libre dans la limite des places disponibles

Cycle de 4 conférences
L'équilibre : un sens renversant
 Comment l'homme est devenu bipède ?
 Comment son anatomie s'est modifiée ?
 Comment le cerveau veille à l'équilibre ?
 Comment des danseurs le défient ?

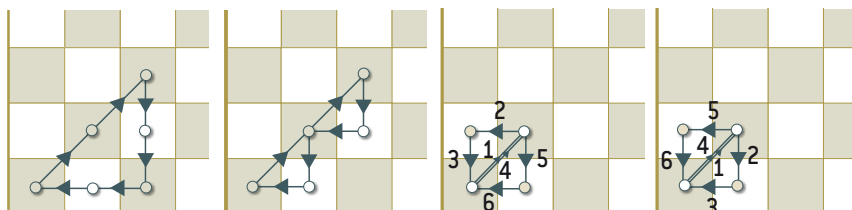
Avec : Pierre Denise, Laura de Nercy, Kitsou Dubois, Christophe Lopez, Brigitte Senut, Christine Tardieu.

programme complet sur cite-sciences.fr

Avec soutien de  



POUR LES MARCHES DE KREWERAS, les déplacements élémentaires autorisés ont pour direction l'Ouest, le Sud ou le Nord-Est (à gauche). En six pas, par exemple, il existe 16 excursions possibles, dont huit sont représentées ici (ci-dessus et ci-dessous).



mais Christoph Koutschan, de l'Institut RICAM en Autriche, trouva une astuce qui permit finalement d'étendre la méthode au cas de la marche de Gessel.

L'été 2008, la conjecture de Gessel devint ainsi le théorème de Kauers, Koutschan et Zeilberger, prouvé grâce à des calculs sur ordinateur. Croyant presque impossible l'existence d'une preuve courte et purement mathématique, Doron Zeilberger promit 100 dollars à quiconque prouverait ce théorème sans ordinateur et en moins de cinq pages.

Des nombres liés par une relation de récurrence

Parallèlement, Manuel Kauers et l'un de nous, Alin Bostan, collaboraient depuis le séminaire de janvier 2008 afin de démontrer que, quel que soit le point d'arrivée A fixé, les nombres de marches se terminant en A satisfont une relation de récurrence. Ils y sont parvenus et ont rendu public leur résultat en août 2008. Bien qu'utilisant également des méthodes informatiques, leurs idées étaient différentes de celles de Manuel Kauers, Christoph Koutschan et Doron Zeilberger. Elles ont permis d'obtenir pour la première fois une formule explicite pour la série génératrice à trois variables, dont les coefficients correspondent aux nombres de marches partant de l'origine et s'achevant au point A, pour tout point A.

Une question restait sans réponse : une preuve purement humaine, sans ordinateur, de ces résultats sur la marche de Gessel est-elle accessible ? Les marches dans un quart de plan apparaissent non seulement

en combinatoire, mais dans de nombreux autres domaines : finance, files d'attente, biologie des populations, mécanique statistique, etc. Aussi des méthodes d'étude théorique de ces marches sont-elles apparues dès les années 1970. Les premières, qui concernaient surtout l'aspect aléatoire, sont dues au Français Guy Fayolle et aux Russes Roudolf Iasnogorodski et Vadim Malyshev. Ces chercheurs ont conçu une approche permettant de résoudre des équations fonctionnelles et d'obtenir des expressions explicites de leurs solutions en faisant appel à des techniques élaborées d'analyse complexe (branche de l'analyse mathématique portant sur les fonctions de variables z complexes, c'est-à-dire de la forme $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels et i le symbole vérifiant $i^2 = -1$).

En suivant cette voie, Irina Kurkova, de l'Université Paris 6, et l'un de nous, Kilian Raschel, ont obtenu en 2009 une expression de la fonction génératrice du modèle de Gessel sous la forme d'une intégrale. Cela permet de montrer l'existence de relations de récurrence pour les nombres d'excursions, mais pas de prouver la conjecture de Gessel.

Il existe aussi un modèle probabiliste pour les marches de Gessel, fondé sur un lien direct entre le nombre de chemins du quadrant allant d'un point A à un point B et la probabilité qu'un certain processus aléatoire aille de A à B tout en restant dans le quart de plan. Par cette démarche, en ramenant l'étude du nombre de marches de Gessel au calcul d'une certaine probabilité, le mathématicien chinois Sun Ping réussit en 2009 à prouver deux conjectures

■ BIBLIOGRAPHIE

A. Bostan *et al.*, **A human proof of Gessel's lattice path conjecture**, prépublication arXiv:1309.1023, 2013.

A. Bostan et M. Kauers, **The complete generating function for Gessel walks is algebraic**, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 138, pp. 3063-3078, 2010.

M. Bousquet-Mélou et M. Mishna, **Walks with small steps in the quarter plane**, *Contemporary Mathematics*, vol. 520, pp. 1-40, 2010.

K. Humphreys, **A history and a survey of lattice path enumeration**, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 140, pp. 2237-2254, 2010.

M. Kauers *et al.*, **Proof of Ira Gessel's lattice path conjecture**, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 106, pp. 11502-11505, 2009.