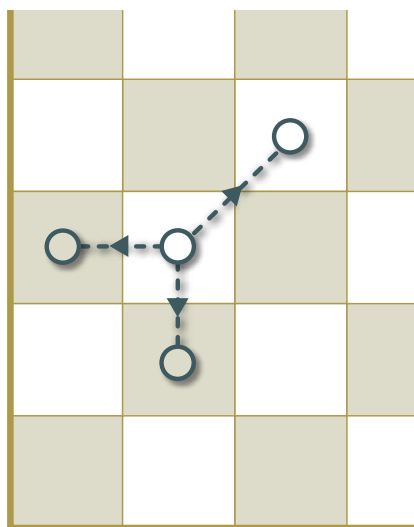
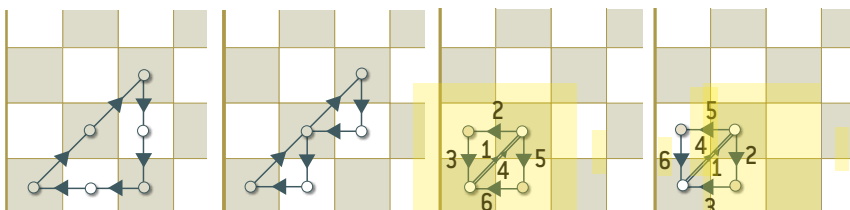


POUR LES MARCHES DE KREWERAS, les déplacements élémentaires autorisés ont pour direction l'Ouest, le Sud ou le Nord-Est (*à gauche*). En six pas, par exemple, il existe 16 excursions possibles, dont huit sont représentées ici (*ci-dessus et ci-dessous*).



mais Christoph Koutschan, de l'Institut RICAM en Autriche, trouva une astuce qui permit finalement d'étendre la méthode au cas de la marche de Gessel.

L'été 2008, la conjecture de Gessel devint ainsi le théorème de Kauers, Koutschan et Zeilberger, prouvé grâce à des calculs sur ordinateur. Croyant presque impossible l'existence d'une preuve courte et purement mathématique, Doron Zeilberger promit 100 dollars à quiconque prouverait ce théorème sans ordinateur et en moins de cinq pages.

Des nombres liés par une relation de récurrence

Parallèlement, Manuel Kauers et l'un de nous, Alin Bostan, collaboraient depuis le séminaire de janvier 2008 afin de démontrer que, quel que soit le point d'arrivée A fixé, les nombres de marches se terminant en A satisfont une relation de récurrence. Ils y sont parvenus et ont rendu public leur résultat en août 2008. Bien qu'utilisant également des méthodes informatiques, leurs idées étaient différentes de celles de Manuel Kauers, Christoph Koutschan et Doron Zeilberger. Elles ont permis d'obtenir pour la première fois une formule explicite pour la série génératrice à trois variables, dont les coefficients correspondent aux nombres de marches partant de l'origine et s'achevant au point A, pour tout point A.

Une question restait sans réponse : une preuve purement humaine, sans ordinateur, de ces résultats sur la marche de Gessel est-elle accessible ? Les marches dans un quart de plan apparaissent non seulement

en combinatoire, mais dans de nombreux autres domaines : finance, files d'attente, biologie des populations, mécanique statistique, etc. Aussi des méthodes d'étude théorique de ces marches sont-elles apparues dès les années 1970. Les premières, qui concernaient surtout l'aspect aléatoire, sont dues au Français Guy Fayolle et aux Russes Roudolf Iasnogorodski et Vadim Malyshev. Ces chercheurs ont conçu une approche permettant de résoudre des équations fonctionnelles et d'obtenir des expressions explicites de leurs solutions en faisant appel à des techniques élaborées d'analyse complexe (branche de l'analyse mathématique portant sur les fonctions de variables z complexes, c'est-à-dire de la forme $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels et i le symbole vérifiant $i^2 = -1$).

En suivant cette voie, Irina Kurkova, de l'Université Paris 6, et l'un de nous, Kilian Raschel, ont obtenu en 2009 une expression de la fonction génératrice du modèle de Gessel sous la forme d'une intégrale. Cela permet de montrer l'existence de relations de récurrence pour les nombres d'excursions, mais pas de prouver la conjecture de Gessel.

Il existe aussi un modèle probabiliste pour les marches de Gessel, fondé sur un lien direct entre le nombre de chemins du quadrant allant d'un point A à un point B et la probabilité qu'un certain processus aléatoire aille de A à B tout en restant dans le quart de plan. Par cette démarche, en ramenant l'étude du nombre de marches de Gessel au calcul d'une certaine probabilité, le mathématicien chinois Sun Ping réussit en 2009 à prouver deux conjectures

BIBLIOGRAPHIE

A. Bostan *et al.*, A human proof of Gessel's lattice path conjecture, prépublication arXiv:1309.1023, 2013.

A. Bostan et M. Kauers, The complete generating function for Gessel walks is algebraic, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 138, pp. 3063-3078, 2010.

M. Bousquet-Mélou et M. Mishna, Walks with small steps in the quarter plane, *Contemporary Mathematics*, vol. 520, pp. 1-40, 2010.

K. Humphreys, A history and a survey of lattice path enumeration, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 140, pp. 2237-2254, 2010.

M. Kauers *et al.*, Proof of Ira Gessel's lattice path conjecture, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 106, pp. 11502-11505, 2009.