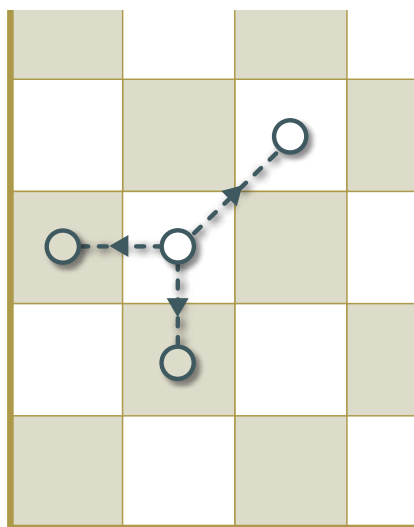
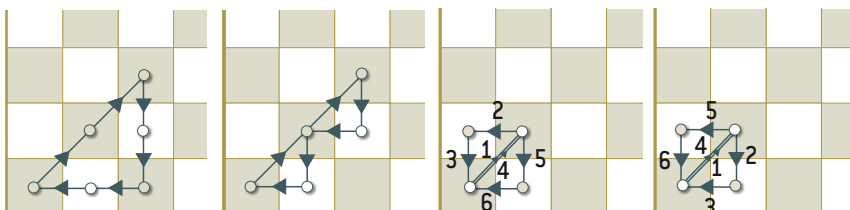


POUR LES MARCHES DE KREWERAS, les déplacements élémentaires autorisés ont pour direction l'Ouest, le Sud ou le Nord-Est (*à gauche*). En six pas, par exemple, il existe 16 excursions possibles, dont huit sont représentées ici (*ci-dessus et ci-dessous*).



mais Christoph Koutschan, de l'Institut RICAM en Autriche, trouva une astuce qui permit finalement d'étendre la méthode au cas de la marche de Gessel.

L'été 2008, la conjecture de Gessel devint ainsi le théorème de Kauers, Koutschan et Zeilberger, prouvé grâce à des calculs sur ordinateur. Croyant presque impossible l'existence d'une preuve courte et purement mathématique, Doron Zeilberger promit 100 dollars à quiconque prouverait ce théorème sans ordinateur et en moins de cinq pages.

Des nombres liés par une relation de récurrence

Parallèlement, Manuel Kauers et l'un de nous, Alin Bostan, collaboraient depuis le séminaire de janvier 2008 afin de démontrer que, quel que soit le point d'arrivée A fixé, les nombres de marches se terminant en A satisfont une relation de récurrence. Ils y sont parvenus et ont rendu public leur résultat en août 2008. Bien qu'utilisant également des méthodes informatiques, leurs idées étaient différentes de celles de Manuel Kauers, Christoph Koutschan et Doron Zeilberger. Elles ont permis d'obtenir pour la première fois une formule explicite pour la série génératrice à trois variables, dont les coefficients correspondent aux nombres de marches partant de l'origine et s'achevant au point A, pour tout point A.

Une question restait sans réponse : une preuve purement humaine, sans ordinateur, de ces résultats sur la marche de Gessel est-elle accessible ? Les marches dans un quart de plan apparaissent non seulement

en combinatoire, mais dans de nombreux autres domaines : finance, files d'attente, biologie des populations, mécanique statistique, etc. Aussi des méthodes d'étude théorique de ces marches sont-elles apparues dès les années 1970. Les premières, qui concernaient surtout l'aspect aléatoire, sont dues au Français Guy Fayolle et aux Russes Roudolf Iasnogorodski et Vadim Malyshev. Ces chercheurs ont conçu une approche permettant de résoudre des équations fonctionnelles et d'obtenir des expressions explicites de leurs solutions en faisant appel à des techniques élaborées d'analyse complexe (branche de l'analyse mathématique portant sur les fonctions de variables z complexes, c'est-à-dire de la forme $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels et i le symbole vérifiant $i^2 = -1$).

En suivant cette voie, Irina Kurkova, de l'Université Paris 6, et l'un de nous, Kilian Raschel, ont obtenu en 2009 une expression de la fonction génératrice du modèle de Gessel sous la forme d'une intégrale. Cela permet de montrer l'existence de relations de récurrence pour les nombres d'excursions, mais pas de prouver la conjecture de Gessel.

Il existe aussi un modèle probabiliste pour les marches de Gessel, fondé sur un lien direct entre le nombre de chemins du quadrant allant d'un point A à un point B et la probabilité qu'un certain processus aléatoire aille de A à B tout en restant dans le quart de plan. Par cette démarche, en ramenant l'étude du nombre de marches de Gessel au calcul d'une certaine probabilité, le mathématicien chinois Sun Ping réussit en 2009 à prouver deux conjectures

■ BIBLIOGRAPHIE

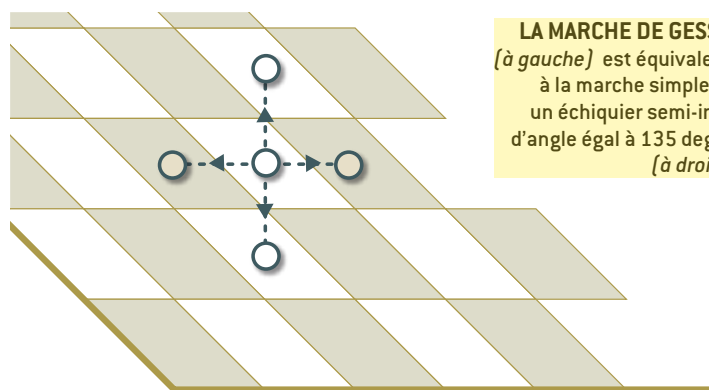
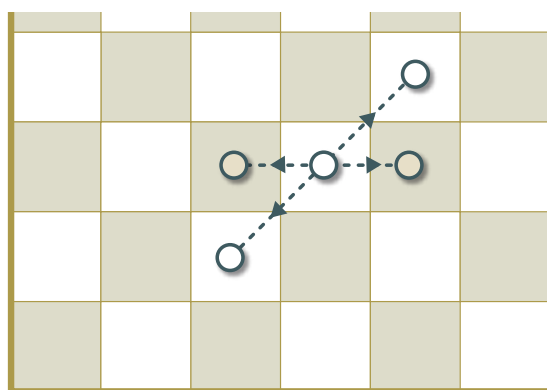
A. Bostan *et al.*, **A human proof of Gessel's lattice path conjecture**, prépublication arXiv:1309.1023, 2013.

A. Bostan et M. Kauers, **The complete generating function for Gessel walks is algebraic**, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 138, pp. 3063-3078, 2010.

M. Bousquet-Mélou et M. Mishna, **Walks with small steps in the quarter plane**, *Contemporary Mathematics*, vol. 520, pp. 1-40, 2010.

K. Humphreys, **A history and a survey of lattice path enumeration**, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 140, pp. 2237-2254, 2010.

M. Kauers *et al.*, **Proof of Ira Gessel's lattice path conjecture**, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 106, pp. 11502-11505, 2009.



LA MARCHÉ DE GESSEL
(à gauche) est équivalente
à la marche simple sur
un échiquier semi-infini
d'angle égal à 135 degrés
(à droite).

proposées l'année précédente et apparentées à celle de Gessel, mais plus faibles.

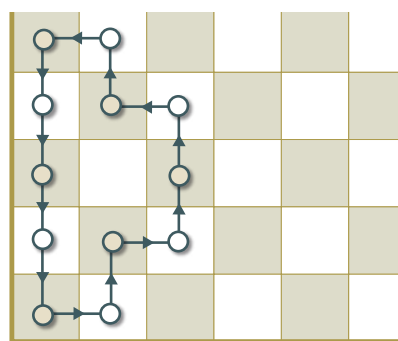
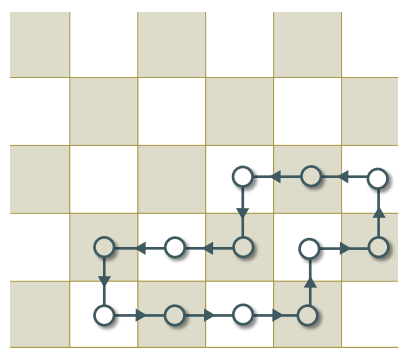
En 2013, en collaboration avec Irina Kurkova, nous avons pu fournir la première preuve purement humaine de la conjecture de Gessel. Notre approche n'utilise que des mathématiques du XIX^e siècle (de l'analyse complexe pour l'essentiel). Cela peut paraître surprenant, si l'on compare avec la modernité et la puissance de la preuve par ordinateur rendue publique en 2008.

La démarche peut se résumer en disant que nous prenons trois fois de la hauteur (un procédé omniprésent en mathématiques : plutôt que de s'attaquer directement à un problème, il faut parfois changer d'échelle pour le faire céder).

Prouver sans ordinateur

D'abord, comme beaucoup avant nous, plutôt que de travailler directement sur les nombres de marches, nous considérons leur fonction génératrice. Ensuite, nous considérons non seulement la fonction génératrice des nombres d'excursions (marches partant et revenant à l'origine), mais celle, plus générale, des nombres de chemins partant de l'origine et se terminant en n'importe quel autre point du quart de plan. Enfin, nous étendons, par les méthodes de l'analyse complexe, le domaine sur lequel cette fonction génératrice est *a priori* définie.

En procédant ainsi, nous avons montré qu'une transformation simple de la fonction génératrice donne une fonction dotée d'une double périodicité (alors que des fonctions telles que le sinus n'ont qu'une seule périodicité). Plus précisément, cette fonction appartient à la famille des fonctions dites elliptiques, étudiées au XIX^e siècle par des mathématiciens prestigieux, tels le Norvégien Niels Abel et les Allemands



DEUX EXCURSIONS EN 12 PAS pour
la marche simple, l'une sur un demi-plan (en
haut), l'autre sur un quart de plan (en bas).

Carl Gustav Jacobi et Karl Weierstrass. La double périodicité nous a permis d'exprimer nos fonctions génératrices à l'aide de fonctions spéciales classiques (les « fonctions elliptiques de Weierstrass »).

Nous disposons ainsi d'une expression explicite pour la série génératrice des excursions, mais dans un langage très différent de celui intervenant dans la formule initiale proposée par Ira Gessel. Toute la difficulté, que nous avons heureusement pu surmonter, était alors de retrouver cette dernière en utilisant l'arsenal des identités et propriétés vérifiées par les fonctions elliptiques de Weierstrass.

Alors que nous avions presque finalisé d'une preuve « humaine » de la conjecture, Ira Gessel proposa en mars 2013 de nouvelles conjectures. Elles concernent l'existence de formules explicites pour le nombre de chemins partant de l'origine et se terminant en un point donné de l'un des axes. Il est vraisemblable que l'on puisse utiliser notre approche, pour laquelle le point d'arrivée n'est pas essentiel, afin de prouver ces nouvelles conjectures.

Toutefois, notre approche admet aussi des limites, puisqu'elle ne permet pas de répondre aux questions suivantes, qui font l'objet de recherches : que dire des marches où chaque déplacement élémentaire est plus grand que le pas du réseau, c'est-à-dire qui va au-delà des plus proches voisins ? Existe-t-il des formules pour les excursions des marches en trois dimensions, voire en dimension encore supérieure ? Peut-on trouver des preuves plus combinatoires, c'est-à-dire prenant davantage en compte la structure des chemins ? Enfin, notre preuve occupant environ 30 pages, est-il possible de trouver une preuve en moins de cinq pages, objet de la récompense promise par Doron Zeilberger ? L'avenir seul répondra. ■