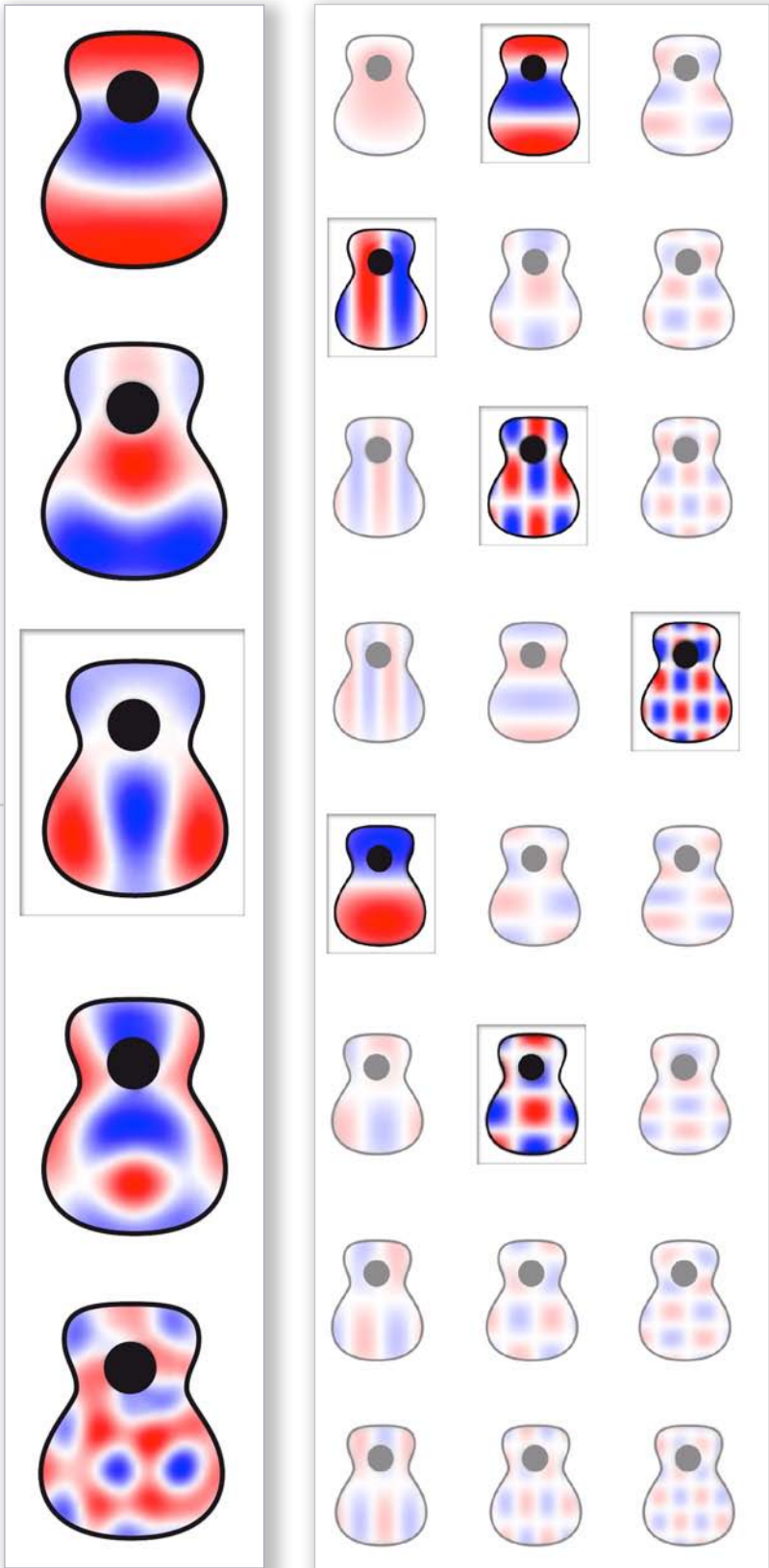


Modes propres

Catalogue d'ondes planes



de connaître l'image dans un autre plan, sans la mesurer directement. Dans le cas de l'holographie acoustique, l'enregistrement sonore est notre « hologramme ». Comme pour la vibrométrie, une fois déterminé le champ vibratoire de la table d'harmonie, il est possible de retrouver les fréquences propres et les modes de vibration de l'instrument.

Dans la perspective d'assister le luthier, la méthode est séduisante : le microphone est un outil répandu, d'usage simple et assez peu coûteux. Il est en outre relativement aisé d'assembler quelques dizaines de micros pour fabriquer une antenne. On utilise couramment ce type d'instrument en imagerie acoustique, par exemple dans l'industrie automobile pour localiser les sources de bruit vers l'extérieur ou dans l'habitacle des véhicules.

Cependant, pour le luthier, le nombre de micros afin d'acquérir un hologramme suffisamment bien défini est un obstacle. Généralement, plusieurs centaines de micros sont nécessaires, ce qui est prohibitif.

Multiplier les mesures

Une solution alternative consiste à utiliser une antenne portant un nombre plus raisonnable de micros et à répéter la mesure pour différentes positions : on simule ainsi une antenne plus dense. Dans l'une des premières expériences que nous avons réalisées, une antenne de 120 micros a été déplacée en 16 positions afin d'obtenir un niveau de détail suffisant pour la structure testée : une plaque plane et rectangulaire. Les 120 mesures, répétées sur 16 positions, ont produit en une quinzaine de minutes un hologramme à 1 920 points à partir duquel nous avons effectué la rétropropagation numérique et identifié les modes propres.

Le dispositif est beaucoup moins coûteux qu'un vibromètre laser, mais sa mise en œuvre reste trop délicate pour un usage courant. Il faut reproduire à l'identique le coup de marteau pour chaque mesure, car la reconstruction des vibrations à partir de l'hologramme y est très sensible. Pourrait-on se passer des manipulations supplémentaires et faire l'acquisition des signaux utiles en une seule opération ?

Avec une seule mesure sur chacun des 120 microphones, il n'est pas possible de reconstruire le champ de vibration avec assez de précision pour déterminer les modes propres. Le système est dit

Échantillonnage compressé et parcimonie

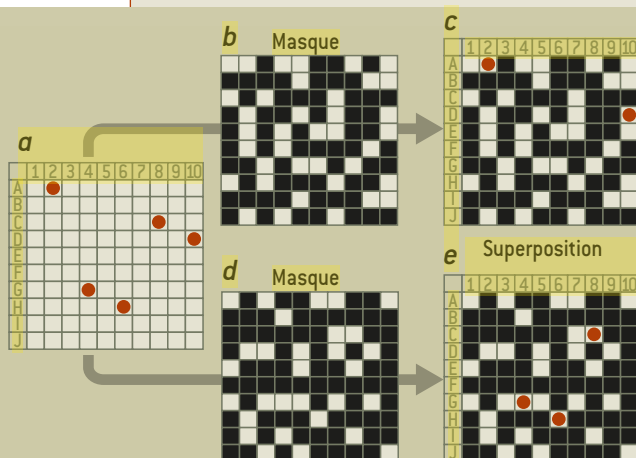
Pour comprendre le principe de l'échantillonnage compressé, commençons par une analogie simple : le jeu de la Bataille navale, que nous allons encore simplifier en considérant que les cinq bateaux n'occupent qu'une seule case chacun, dans une grille de 10 x 10.

Le but du jeu est de retrouver la position de tous les bateaux ennemis en posant le minimum de questions, chacune testant une case à la fois : A7 ? F4 ? On s'aperçoit vite que cette façon de sonder l'ensemble de la grille n'est pas très efficace : presque tous les coups « tombent à l'eau » et, en fin de compte, il ne faudra pas beaucoup moins de

renseigne, certes de façon imparfaite, sur l'ensemble de la grille. Nous utilisons alors des méthodes liées aux nombres aléatoires. Par exemple, construisons un « masque binaire », de même taille 10 x 10 que la grille, avec autant de cases opaques que de cases transparentes, réparties aléatoirement (voir ci-dessous). Les nouvelles questions

rapport à la taille de la grille : seules 5 % des cases sont occupées. En mathématiques, cette propriété est nommée la parcimonie : un objet complexe (telle une grille de Bataille navale) peut être décrit comme la somme d'un très petit nombre d'objets élémentaires.

D'une façon générale, la théorie de l'échantillonnage compressé, développée il y a une dizaine d'années, décrit comment acquérir le plus efficacement possible des données complexes, sachant qu'elles vérifient la propriété de parcimonie. Dans le cas de l'holographie



DANS UNE BATAILLE NAVALE simplifiée avec cinq bateaux noirs sur une grille (a), tester chaque case l'une après l'autre n'est pas la meilleure stratégie. On gagne en efficacité si on teste par ligne ou par colonne la présence d'un bateau et on recoupe les informations. On est d'autant plus performant en utilisant des masques non réguliers (b et d). Chacun fournit un certain nombre d'informations (c et e). On retrouve la position de tous les navires avec quelques masques.

100 questions pour finir la partie (en moyenne, il faut 84 questions).

Pour être plus efficace – en faisant abstraction des règles du jeu ! –, il faut que chaque question nous renseigne simultanément sur plusieurs positions spatiales : par exemple, « y a-t-il au moins un bateau sur la colonne D ? Sur la ligne 7 ? » C'est mieux, car on a ainsi des chances d'éliminer toute une série de cases en une seule question. L'étape suivante est de poser une question qui nous

seraient : « À travers ce masque, combien peut-on voir de bateaux ? Et à travers cet autre masque ? » Avec une vingtaine de ces masques et les réponses correspondantes, un petit programme numérique ne met que quelques secondes pour retrouver entièrement la grille de l'adversaire. Le nombre de « questions » a été divisé par quatre ! La performance n'est cependant pas toujours au rendez-vous. Cela ne fonctionne ici que parce que le nombre de bateaux est faible par

acoustique compressée, on sait *a priori* que notre donnée inconnue (un mode propre) se décompose comme une somme d'un petit nombre de formes élémentaires (des ondes planes) parmi une infinité – ou au moins un catalogue important – d'ondes planes. Le but est de retrouver cette combinaison : on ne sait pas ce qu'elle est, on sait juste qu'elle existe et qu'un petit nombre d'observations judicieusement placées peut la révéler.

– N. B., L. D., R. G. et F. O.

sous-échantillonné. Cependant, on peut compenser cette lacune en apportant une connaissance *a priori* de la vibration de la structure. C'est ici que la conjonction de compétences en physique, mathématiques et informatique se révèle décisive.

Il nous faut revenir ici à la notion de modes propres. La vibration, au premier abord complexe, peut s'expliquer comme la superposition de ces modes, chacun d'eux se manifestant à une fréquence dite de résonance et chacun ayant un coefficient de pondération. Ce premier niveau de décomposition est d'ailleurs utilisé dans les techniques d'imagerie classique précédemment évoquées. Le résultat qu'elles produisent n'est pas une image unique de la vibration, mais une série d'images de chacun de ses modes propres, dont la superposition constitue la vibration totale.

Compléter l'information avec des ondes planes

Un mode propre peut, à son tour, être décomposé en formes plus simples : des ondes planes. L'onde plane est une onde « théorique », associée à une seule fréquence et se propageant dans une seule direction ; elle ne peut exister que dans un milieu infini. Mathématiquement parlant, c'est une solution élémentaire de l'équation des ondes – équation qui régit l'évolution de la pression acoustique dans l'espace et le temps. Il existe une infinité d'ondes planes, qui diffèrent par leur longueur d'onde et leur direction de propagation. Or on montre mathématiquement que la combinaison de quelques éléments seulement de cet ensemble infini suffit pour reconstituer un mode propre avec précision. Identifier un mode propre revient donc à déterminer les quelques ondes planes principales qui le composent.

Finalement, il y a deux niveaux de décomposition. Au niveau mécanique, la vibration est d'abord considérée comme la superposition de certains modes propres. Puis, au niveau mathématique, chaque mode propre est lui-même modélisé comme la somme « parcimonieuse », c'est-à-dire d'un nombre réduit, d'ondes planes. Dans le cas de la table d'harmonie d'une guitare, une dizaine d'ondes planes suffisent.

La stratégie adoptée consiste à déterminer les ondes planes qui, d'après cette double décomposition, participent à la vibration de la table d'harmonie, uniquement à