

Échantillonnage compressé et parcimonie

Pour comprendre le principe de l'échantillonnage compressé, commençons par une analogie simple : le jeu de la Bataille navale, que nous allons encore simplifier en considérant que les cinq bateaux n'occupent qu'une seule case chacun, dans une grille de 10 x 10.

Le but du jeu est de retrouver la position de tous les bateaux ennemis en posant le minimum de questions, chacune testant une case à la fois : A7 ? F4 ? On s'aperçoit vite que cette façon de sonder l'ensemble de la grille n'est pas très efficace : presque tous les coups « tombent à l'eau » et, en fin de compte, il ne faudra pas beaucoup moins de

renseigne, certes de façon imparfaite, sur l'ensemble de la grille. Nous utilisons alors des méthodes liées aux nombres aléatoires. Par exemple, construisons un « masque binaire », de même taille 10 x 10 que la grille, avec autant de cases opaques que de cases transparentes, réparties aléatoirement (voir ci-dessous). Les nouvelles questions

rapport à la taille de la grille : seules 5 % des cases sont occupées. En mathématiques, cette propriété est nommée la parcimonie : un objet complexe (telle une grille de Bataille navale) peut être décrit comme la somme d'un très petit nombre d'objets élémentaires.

D'une façon générale, la théorie de l'échantillonnage compressé, développée il y a une dizaine d'années, décrit comment acquérir le plus efficacement possible des données complexes, sachant qu'elles vérifient la propriété de parcimonie. Dans le cas de l'holographie

sous-échantillonné. Cependant, on peut compenser cette lacune en apportant une connaissance *a priori* de la vibration de la structure. C'est ici que la conjonction de compétences en physique, mathématiques et informatique se révèle décisive.

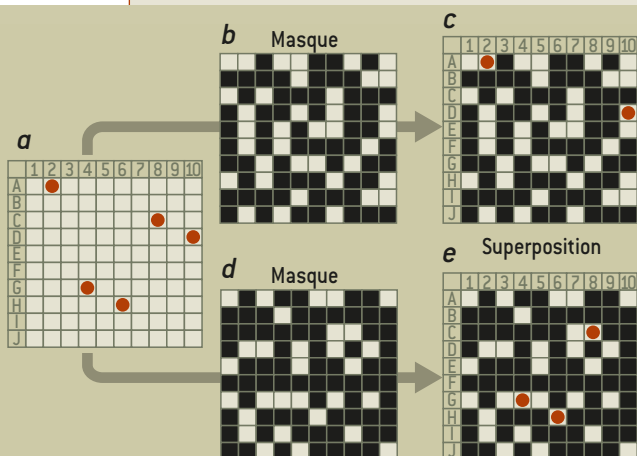
Il nous faut revenir ici à la notion de modes propres. La vibration, au premier abord complexe, peut s'expliquer comme la superposition de ces modes, chacun d'eux se manifestant à une fréquence dite de résonance et chacun ayant un coefficient de pondération. Ce premier niveau de décomposition est d'ailleurs utilisé dans les techniques d'imagerie classique précédemment évoquées. Le résultat qu'elles produisent n'est pas une image unique de la vibration, mais une série d'images de chacun de ses modes propres, dont la superposition constitue la vibration totale.

Compléter l'information avec des ondes planes

Un mode propre peut, à son tour, être décomposé en formes plus simples : des ondes planes. L'onde plane est une onde « théorique », associée à une seule fréquence et se propageant dans une seule direction ; elle ne peut exister que dans un milieu infini. Mathématiquement parlant, c'est une solution élémentaire de l'équation des ondes – équation qui régit l'évolution de la pression acoustique dans l'espace et le temps. Il existe une infinité d'ondes planes, qui diffèrent par leur longueur d'onde et leur direction de propagation. Or on montre mathématiquement que la combinaison de quelques éléments seulement de cet ensemble infini suffit pour reconstituer un mode propre avec précision. Identifier un mode propre revient donc à déterminer les quelques ondes planes principales qui le composent.

Finalement, il y a deux niveaux de décomposition. Au niveau mécanique, la vibration est d'abord considérée comme la superposition de certains modes propres. Puis, au niveau mathématique, chaque mode propre est lui-même modélisé comme la somme « parcimonieuse », c'est-à-dire d'un nombre réduit, d'ondes planes. Dans le cas de la table d'harmonie d'une guitare, une dizaine d'ondes planes suffisent.

La stratégie adoptée consiste à déterminer les ondes planes qui, d'après cette double décomposition, participent à la vibration de la table d'harmonie, uniquement à



DANS UNE BATAILLE NAVALE simplifiée avec cinq bateaux noirs sur une grille (a), tester chaque case l'une après l'autre n'est pas la meilleure stratégie. On gagne en efficacité si on teste par ligne ou par colonne la présence d'un bateau et on recoupe les informations. On est d'autant plus performant en utilisant des masques non réguliers (b et d). Chacun fournit un certain nombre d'informations (c et e). On retrouve la position de tous les navires avec quelques masques.

100 questions pour finir la partie (en moyenne, il faut 84 questions).

Pour être plus efficace – en faisant abstraction des règles du jeu ! –, il faut que chaque question nous renseigne simultanément sur plusieurs positions spatiales : par exemple, « y a-t-il au moins un bateau sur la colonne D ? Sur la ligne 7 ? » C'est mieux, car on a ainsi des chances d'éliminer toute une série de cases en une seule question. L'étape suivante est de poser une question qui nous

seraient : « À travers ce masque, combien peut-on voir de bateaux ? Et à travers cet autre masque ? » Avec une vingtaine de ces masques et les réponses correspondantes, un petit programme numérique ne met que quelques secondes pour retrouver entièrement la grille de l'adversaire. Le nombre de « questions » a été divisé par quatre ! La performance n'est cependant pas toujours au rendez-vous. Cela ne fonctionne ici que parce que le nombre de bateaux est faible par

acoustique compressée, on sait *a priori* que notre donnée inconnue (un mode propre) se décompose comme une somme d'un petit nombre de formes élémentaires (des ondes planes) parmi une infinité – ou au moins un catalogue important – d'ondes planes. Le but est de retrouver cette combinaison : on ne sait pas ce qu'elle est, on sait juste qu'elle existe et qu'un petit nombre d'observations judicieusement placées peut la révéler.

– N. B., L. D., R. G. et F. O.

partir de ce que mesurent en une fois les 120 microphones de l'antenne. La théorie du traitement du signal nous assure qu'il est possible de reconstruire le champ vibratoire avec une précision comparable à celle de la vibrométrie laser et de l'holographie acoustique classique. Cela est faisable grâce au caractère parcimonieux en ondes planes des modes propres de vibration. Si les ondes planes pertinentes avaient été nombreuses, 120 mesures auraient été insuffisantes pour contraindre correctement les combinaisons possibles. Ainsi, la combinaison la plus parcimonieuse d'ondes planes nous donne accès au champ vibratoire de la table d'harmonie, et par suite aux modes propres. Cette approche est nommée «holographie acoustique compressée», en référence à une technique mathématique récente également appliquée en imagerie médicale ou en radioastronomie : l'échantillonnage compressé (voir l'encadré page 42). Le calcul de la combinaison optimale (la plus parcimonieuse) d'ondes planes repose sur des algorithmes d'optimisation numérique qui, bien que complexes, sont à la portée des ordinateurs de bureau actuels.

Figures de Chladni

Le physicien allemand Ernst Chladni (1756-1827) a étudié les vibrations de plaques en les frottant avec un archet. Dans une version moderne de l'expérience, un haut-parleur crée les vibrations. Une poudre fine dispersée sur la plaque permet de les visualiser : elle se déplace et forme des motifs (ci-dessous) en se concentrant aux nœuds de vibration (les régions où l'amplitude de vibration est nulle). Le motif dépend du mode de vibration.



Elmar Bergler

Comment détermine-t-on les ondes planes qui composent la vibration de l'instrument de musique ? En théorie, le nombre d'ondes planes possibles est infini, la direction et la longueur d'onde pouvant prendre n'importe quelles valeurs. Comme cela n'est pas gérable dans un programme numérique, nous utilisons un catalogue fini d'ondes planes, avec des valeurs discrètes de direction et de longueur d'onde (de l'ordre d'une centaine d'ondes planes). L'échantillonnage compressé permet de sélectionner rapidement un certain nombre d'ondes planes dont la combinaison reproduit correctement les 120 mesures.

Le principe de parcimonie est crucial dans l'algorithme utilisé. Le programme cherche à minimiser le nombre d'ondes nécessaires pour reproduire le signal enregistré. La combinaison la plus parcimonieuse d'ondes planes nous donne accès au champ vibratoire de la table d'harmonie. À partir de là, nous pouvons calculer les modes propres.

Reste une question : comment disposer les 120 microphones de l'antenne ? De façon un peu contre-intuitive, les algorithmes



Palais de la Découverte



les conférences

au Palais de la découverte

Entrée libre dans la limite des places disponibles

La lumière dévoile l'Univers

> les mercredis à 19h

THEMA
La science en voyage

Cycle de 4 conférences

6 mai **La première lueur de l'Univers**
avec Karim Benabed

20 mai **Aux sources de la lumière**
avec David Elbaz

27 mai **La tapisserie lumineuse**
avec Valérie de Lapparent

3 juin **Les noirceurs de l'Univers**
avec Daniel Kunth

programme complet sur
palais-decouverte.fr

Avec soutien de



