

Pour savoir s'il est possible d'entourer un pavé P par une couronne de deux pavés P , prenez un papier et un crayon et essayez ! (Voir la figure ci-dessous si vous n'y parvenez pas.)

Le pentagone de Heesch : une seule couronne

Le second problème d'entourage qui va nous occuper a pour origine un petit ouvrage allemand publié en 1968, où le mathématicien Heinrich Heesch (1906-1995) formulait une remarque inattendue. Il présentait un pentagone dont les angles sont 90° , 150° , 90° , 150° et 60° et ayant l'étrange propriété suivante : une copie du pentagone de Heesch s'entoure parfaitement, sans chevauchement ni espace laissé vide, par six, sept ou huit copies de lui-même formant une couronne, et pourtant il est impossible de réaliser une seconde couronne autour de la première. On vérifie sans mal que les exemples a , b et c de la figure ci-dessous n'ont pas cette propriété : dans chaque cas, il est possible de construire une seconde couronne autour de la première, et même une troisième, ainsi de suite.

Le pentagone de Heesch réussit donc à paver parfaitement une certaine aire du plan, mais celle-ci est limitée et il est

impossible de prolonger le pavage partiel pour rendre l'entourage plus épais (voir la figure page 80).

Prouver qu'on ne peut pas faire de deuxième couronne exige un raisonnement rigoureux où il faut énumérer soigneusement un grand nombre de cas. Pour se convaincre du résultat, le plus simple est de découper des pavés en carton et d'essayer ; au bout de quelques minutes, vous n'aurez plus aucun doute sur l'impossibilité d'une seconde couronne ! Bien sûr, aujourd'hui, on s'aidera aussi de programmes informatiques qui feront systématiquement les essais de construction et garantiront l'impossibilité d'une nouvelle couronne sans trop de fatigue... pour le mathématicien.

En réalité, le pavé de Heesch n'était pas le premier. On s'est en effet aperçu qu'un pavé proposé en 1928 par le mathématicien allemand Walther Lietzmann, qui a la forme d'une goutte d'eau, a la même propriété. On peut l'entourer avec six copies, mais la couronne ainsi faite est impossible à entourer une seconde fois (figure page 80, b).

On s'est alors demandé si l'on pouvait faire mieux : trouver des pavés admettant non plus une couronne, mais deux, voire plus, sans pour autant que le pavage du plan entier soit possible.

Cela conduit à la définition suivante : le nombre de Heesch d'un pavé P est égal à n si P s'entoure parfaitement de n couronnes d'épaisseur non nulle et faites de copies de P , mais ne peut pas l'être par $(n+1)$ couronnes.

Si aucune couronne n'est faisable, le nombre de Heesch est 0. Lorsqu'un pavé P peut être entouré de n couronnes pour tout n , le nombre de Heesch de P est infini.

Plus le nombre de Heesch est grand, plus la surface pavable par le pavé est grande. Le problème est l'étude des formes qui réussissent à paver de grandes surfaces sans paver tout le plan.

Pavés dont le nombre de Heesch vaut 1

Les figures ayant un nombre de Heesch égal à 1 sont toutes intéressantes, et en trouver demande astuce et imagination. Le Japonais Yoshio Agaoka a découvert en 2005 une forme régulière symétrique ayant un nombre de Heesch égal à 1. C'est le polygone convexe à sept côtés, un heptagone, dont les angles sont 60° , 160° , 160° , 100° , 100° , 160° et 160° (figure page 80, c).

On démontre qu'un heptagone convexe ne peut pas paver le plan tout entier. L'heptagone de Agaoka, notons-le HA, a donc un

