

Pour savoir s'il est possible d'entourer un pavé P par une couronne de deux pavés P , prenez un papier et un crayon et essayez ! (Voir la figure ci-dessous si vous n'y parvenez pas.)

Le pentagone de Heesch : une seule couronne

Le second problème d'entourage qui va nous occuper a pour origine un petit ouvrage allemand publié en 1968, où le mathématicien Heinrich Heesch (1906-1995) formulait une remarque inattendue. Il présentait un pentagone dont les angles sont 90° , 150° , 90° , 150° et 60° et ayant l'étrange propriété suivante : une copie du pentagone de Heesch s'entoure parfaitement, sans chevauchement ni espace laissé vide, par six, sept ou huit copies de lui-même formant une couronne, et pourtant il est impossible de réaliser une seconde couronne autour de la première. On vérifie sans mal que les exemples a , b et c de la figure ci-dessous n'ont pas cette propriété : dans chaque cas, il est possible de construire une seconde couronne autour de la première, et même une troisième, ainsi de suite.

Le pentagone de Heesch réussit donc à paver parfaitement une certaine aire du plan, mais celle-ci est limitée et il est

impossible de prolonger le pavage partiel pour rendre l'entourage plus épais (voir la figure page 80).

Prouver qu'on ne peut pas faire de deuxième couronne exige un raisonnement rigoureux où il faut énumérer soigneusement un grand nombre de cas. Pour se convaincre du résultat, le plus simple est de découper des pavés en carton et d'essayer ; au bout de quelques minutes, vous n'aurez plus aucun doute sur l'impossibilité d'une seconde couronne ! Bien sûr, aujourd'hui, on s'aidera aussi de programmes informatiques qui feront systématiquement les essais de construction et garantiront l'impossibilité d'une nouvelle couronne sans trop de fatigue... pour le mathématicien.

En réalité, le pavé de Heesch n'était pas le premier. On s'est en effet aperçu qu'un pavé proposé en 1928 par le mathématicien allemand Walther Lietzmann, qui a la forme d'une goutte d'eau, a la même propriété. On peut l'entourer avec six copies, mais la couronne ainsi faite est impossible à entourer une seconde fois (figure page 80, b).

On s'est alors demandé si l'on pouvait faire mieux : trouver des pavés admettant non plus une couronne, mais deux, voire plus, sans pour autant que le pavage du plan entier soit possible.

Cela conduit à la définition suivante : le nombre de Heesch d'un pavé P est égal à n si P s'entoure parfaitement de n couronnes d'épaisseur non nulle et faites de copies de P , mais ne peut pas l'être par $(n+1)$ couronnes.

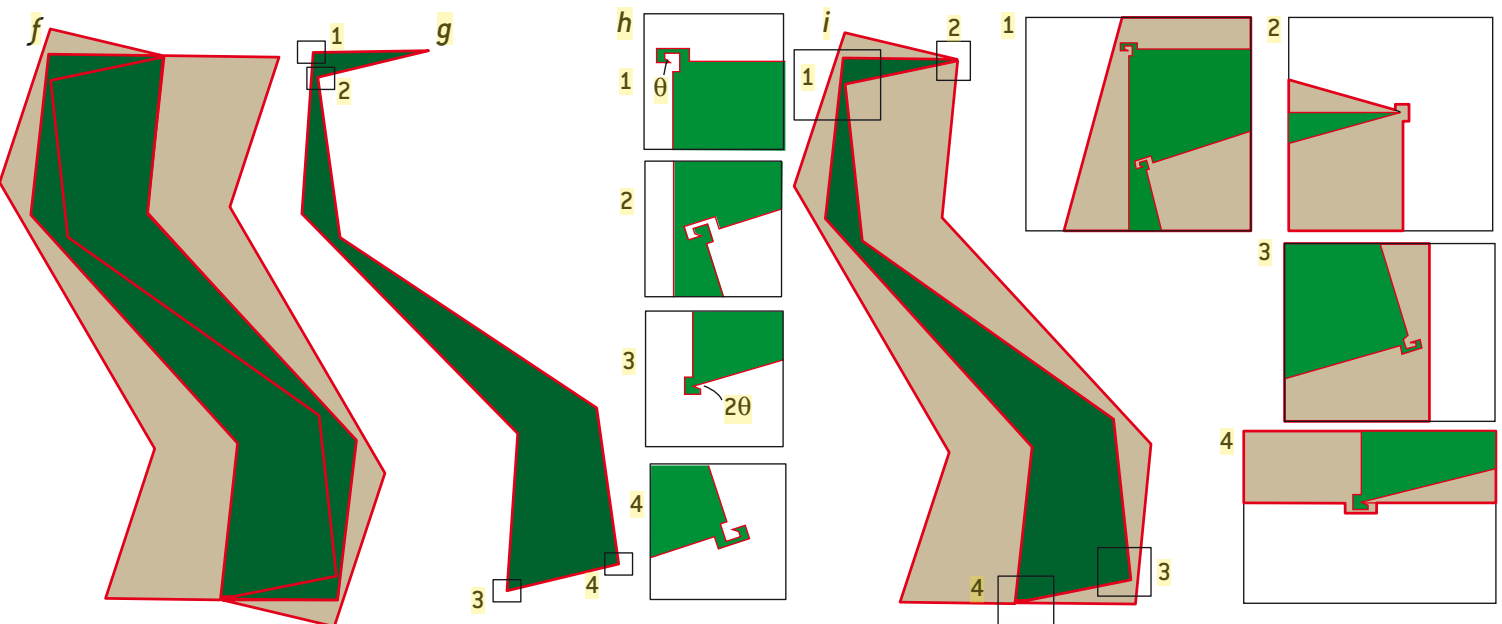
Si aucune couronne n'est faisable, le nombre de Heesch est 0. Lorsqu'un pavé P peut être entouré de n couronnes pour tout n , le nombre de Heesch de P est infini.

Plus le nombre de Heesch est grand, plus la surface pavable par le pavé est grande. Le problème est l'étude des formes qui réussissent à paver de grandes surfaces sans paver tout le plan.

Pavés dont le nombre de Heesch vaut 1

Les figures ayant un nombre de Heesch égal à 1 sont toutes intéressantes, et en trouver demande astuce et imagination. Le Japonais Yoshio Agaoka a découvert en 2005 une forme régulière symétrique ayant un nombre de Heesch égal à 1. C'est le polygone convexe à sept côtés, un heptagone, dont les angles sont 60° , 160° , 160° , 100° , 100° , 160° et 160° (figure page 80, c).

On démontre qu'un heptagone convexe ne peut pas paver le plan tout entier. L'heptagone de Agaoka, notons-le HA, a donc un



Une couronne, mais pas deux

Voici des exemples de pavés (en vert) ayant un nombre de Heesch égal à 1, c'est-à-dire des pavés que l'on peut entourer d'une couronne composée de copies du pavé et d'épaisseur non nulle, mais que l'on ne peut pas entourer d'une seconde couronne.

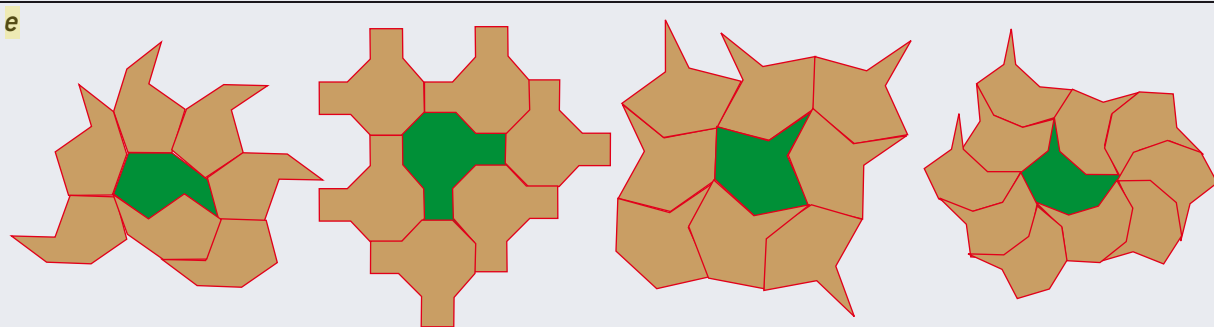
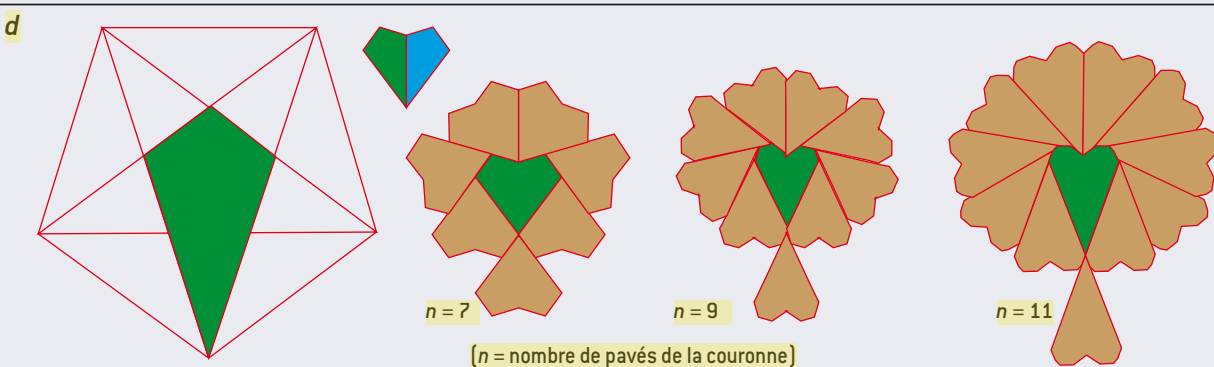
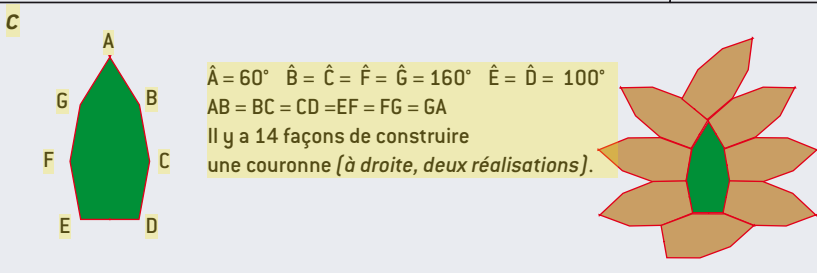
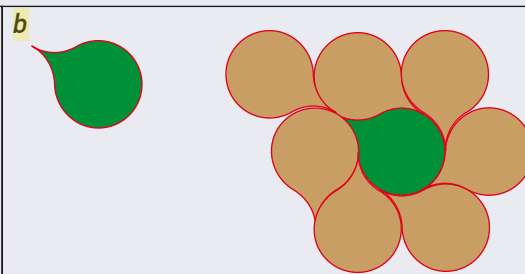
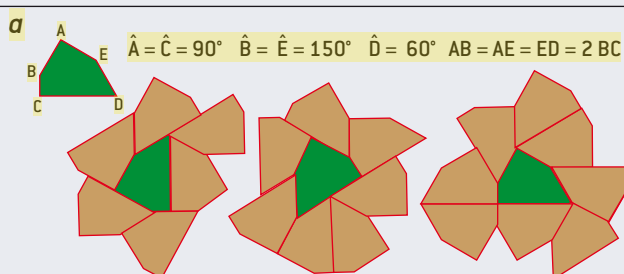
(a) Le pavé découvert en 1968 par Heinrich Heesch et trois façons de constituer une couronne.

(b) La goutte d'eau de l'Allemand Walther Lietzmann (1928).

(c) Le bel heptagone de Yoshio Agaoka (2005).

(d) La méthode générale de Peter Raedschelders (1998) pour construire une famille infinie de pavés à nombre de Heesch égal à 1.

(e) Divers pavés ayant un nombre de Heesch égal à 1 construits par Mark Thompson à partir de polygones réguliers.



nombre de Heesch fini. Une recherche systématique montre qu'il existe 14 façons différentes de faire une couronne autour de HA [voir la figure c page ci-contre pour deux exemples ; trouver les 12 autres est un amusant casse-tête]. Ces diverses couronnes montrent que le nombre de Heesch de HA est au moins 1. Un peu de patience permet de s'assurer qu'aucune de ces 14 couronnes ne s'entoure d'une autre couronne ; par conséquent, le nombre de Heesch de HA est exactement 1.

Peter Raedschelders, en Belgique, a découvert une famille infinie de pavés dont le nombre de Heesch est 1. On part d'une étoile régulière à k branches, avec k impair. Cela détermine une forme qui, accolée à elle-même, constitue le pavé cherché (figure d). L'intérêt de cette construction est que le nombre de pavés nécessaire pour construire la couronne est $k + 2$. Il s'ensuit que pour tout k , on connaît un pavé dont des copies s'assemblent pour couvrir une surface, presque ronde et sans trou, d'aire $(k + 3)$ fois supérieure à l'aire du pavé utilisé, mais qui ne peut pas paver le plan infini. La possibilité de paver un disque d'aire très grande par rapport à l'aire du pavé initial ne garantit donc jamais qu'il soit possible de paver le plan.

Des pavés au nombre de Heesch égal à 2 ou 3

Il a fallu attendre 1991 pour que les premiers pavés à nombre de Heesch supérieur à 1 soient identifiés. Anne Fontaine, de l'Université de l'État de New York à Albany, proposa une famille entière de tels pavés. Une sorte de U s'entoure de deux couronnes, bien qu'il soit impossible d'en faire une troisième (voir l'encadré ci-contre, a et b).

En 2003, Glenn Rhoads, pour son travail de doctorat mené à l'Université du New Jersey, a étudié les pavés obtenus en accolant des carrés par leurs côtés, qu'on dénomme polyominoes. Ils ont été testés un à un jusqu'à en trouver d'intéressants. Le programme écrit par Glenn Rhoads a ainsi pu déterminer le plus petit polyomino dont le nombre de Heesch est 2 (ci-contre, c). Ce polyomino optimal est composé de

Deux couronnes, mais pas trois

Les premiers pavés ayant 2 pour nombre de Heesch sont dus à Anne Fontaine. La forme générale, représentée en a, engendre une famille infinie de pavés. Un exemple de pavage partiel réalisant deux couronnes (mais pas trois) est dessiné en b.

Le dessin c montre le plus petit polyomino ayant un nombre de Heesch égal à 2 et les trois façons de disposer les deux couronnes : elles ne diffèrent que par la position de deux pavés (en jaune).

