

nombre de Heesch fini. Une recherche systématique montre qu'il existe 14 façons différentes de faire une couronne autour de HA [voir la figure c page ci-contre pour deux exemples; trouver les 12 autres est un amusant casse-tête]. Ces diverses couronnes montrent que le nombre de Heesch de HA est au moins 1. Un peu de patience permet de s'assurer qu'aucune de ces 14 couronnes ne s'entoure d'une autre couronne; par conséquent, le nombre de Heesch de HA est exactement 1.

Peter Raedschelders, en Belgique, a découvert une famille infinie de pavés dont le nombre de Heesch est 1. On part d'une étoile régulière à k branches, avec k impair. Cela détermine une forme qui, accolée à elle-même, constitue le pavé cherché (figure d). L'intérêt de cette construction est que le nombre de pavés nécessaire pour construire la couronne est $k + 2$. Il s'ensuit que pour tout k , on connaît un pavé dont des copies s'assemblent pour couvrir une surface, presque ronde et sans trou, d'aire $(k + 3)$ fois supérieure à l'aire du pavé utilisé, mais qui ne peut pas paver le plan infini. La possibilité de paver un disque d'aire très grande par rapport à l'aire du pavé initial ne garantit donc jamais qu'il soit possible de paver le plan.

Des pavés au nombre de Heesch égal à 2 ou 3

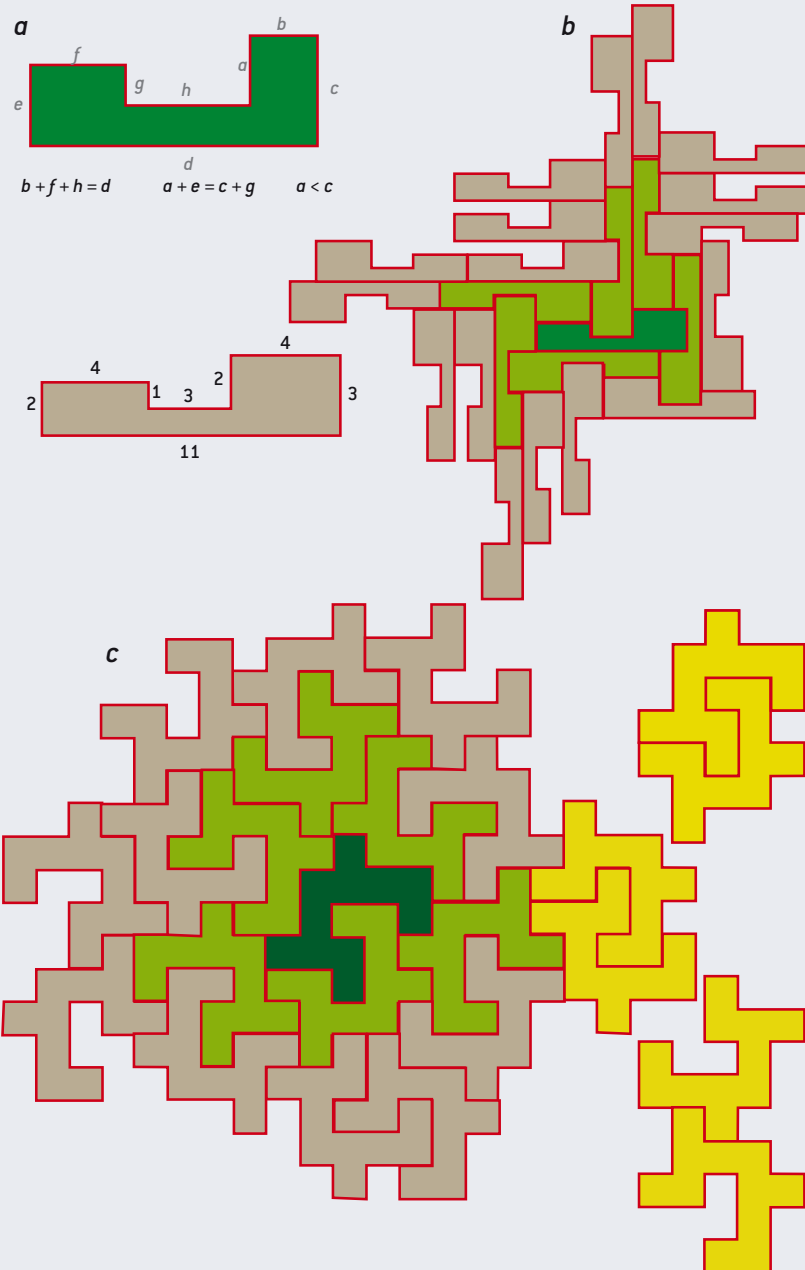
Il a fallu attendre 1991 pour que les premiers pavés à nombre de Heesch supérieur à 1 soient identifiés. Anne Fontaine, de l'Université de l'État de New York à Albany, proposa une famille entière de tels pavés. Une sorte de U s'entoure de deux couronnes, bien qu'il soit impossible d'en faire une troisième (voir l'encadré ci-contre, a et b).

En 2003, Glenn Rhoads, pour son travail de doctorat mené à l'Université du New Jersey, a étudié les pavés obtenus en accolant des carrés par leurs côtés, qu'on dénomme polyominoes. Ils ont été testés un à un jusqu'à en trouver d'intéressants. Le programme écrit par Glenn Rhoads a ainsi pu déterminer le plus petit polyomino dont le nombre de Heesch est 2 (ci-contre, c). Ce polyomino optimal est composé de

Deux couronnes, mais pas trois

Les premiers pavés ayant 2 pour nombre de Heesch sont dus à Anne Fontaine. La forme générale, représentée en a, engendre une famille infinie de pavés. Un exemple de pavage partiel réalisant deux couronnes (mais pas trois) est dessiné en b.

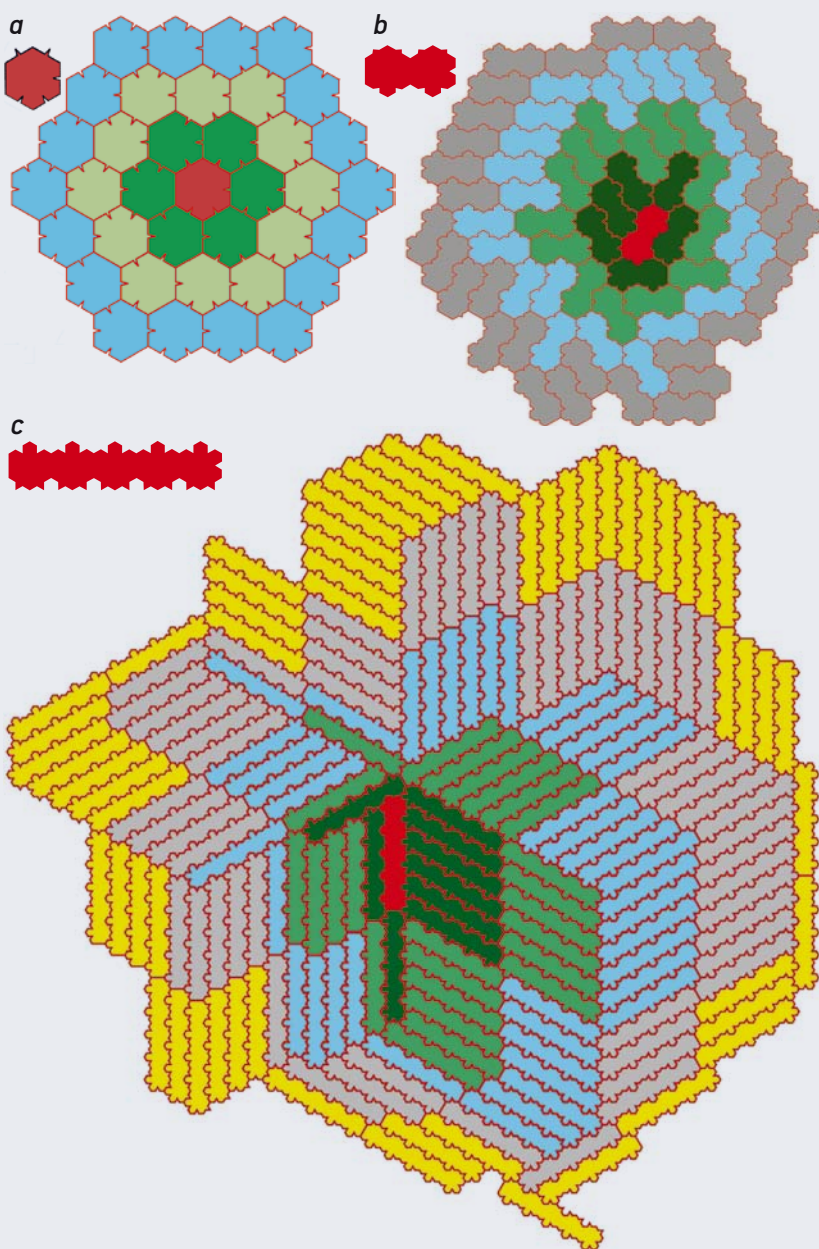
Le dessin c montre le plus petit polyomino ayant un nombre de Heesch égal à 2 et les trois façons de disposer les deux couronnes : elles ne diffèrent que par la position de deux pavés (en jaune).



Le record actuel : cinq couronnes

L'Américain Robert Ammann a découvert en 1991 le premier pavé ayant un nombre de Heesch égal à 3 (a). Casey Mann, dans le cadre de sa thèse de doctorat soutenue en 2001 à l'Université de l'Arkansas, a fait mieux en construisant un pavé (b) à quatre couronnes (nombre de Heesch égal à 4). Enfin, le record

mondial est jusqu'ici détenu par un pavé également découvert par Casey Mann (c). Son nombre de Heesch est égal à 5. Ce pavé est extensible (on peut l'allonger autant que l'on souhaite) et a toujours un nombre de Heesch égal à 5, pourvu qu'il soit composé d'au moins quatre hexagones de base.



11 carrés et il n'y a que trois façons de faire les deux couronnes. Elles ne diffèrent que par la position de deux pavés.

L'année où Anne Fontaine trouvait sa famille infinie de pavés ayant un nombre de Heesch égal à 2, l'Américain Robert Ammann, un amateur de divertissements mathématiques auteur de plusieurs travaux notables concernant les pavages du plan, découvrit un pavé dont le nombre de Heesch est égal à 3. Il s'agit d'un hexagone creusé sur deux côtés et muni d'une petite bosse sur trois autres côtés. Les creux, par exemple triangulaires, s'ajustent parfaitement aux bosses (voir l'encadré ci-contre, a). C'est en généralisant ce type de constructions qu'on a su dépasser le record de 3.

Lors de sa thèse soutenue à l'Université de l'Arkansas en 2001, Casey Mann, aujourd'hui en poste à l'Université de Washington, a entrepris l'étude systématique des trous et des bosses dans des formes pavant le plan à la recherche de pavés dont le nombre de Heesch dépasse 3. Il s'est intéressé à trois types de formes : celles composées de carrés accolés par leurs côtés (les polyominos), celles composées d'hexagones accolés et celles composées de triangles équilatéraux accolés. En ajoutant des bosses et des creux complémentaires entre eux sur certains côtés de ces formes, on obtient des pavés, que Casey Mann dénomme poly-formes, dont le nombre de Heesch dépasse souvent 2.

Indécidabilité

Le résultat qui justifie la méthode et fait croire en son potentiel est le suivant : si P est une poly-forme dont n côtés sont munis d'une bosse et m côtés comportent un creux complémentaire de la bosse, et si m et n sont différents, alors le nombre de Heesch de P est fini (P ne pave pas le plan).

Ce résultat fournit un procédé d'énumération de pavés candidats qui ne pavent pas le plan et qui sont donc susceptibles de battre le record de Ammann. Notons d'ailleurs que le pavé de Ammann est une poly-forme : un hexagone où $m = 3$ et $n = 2$.

Le cas particulier obtenu en accolant k hexagones en ligne et en les munissant