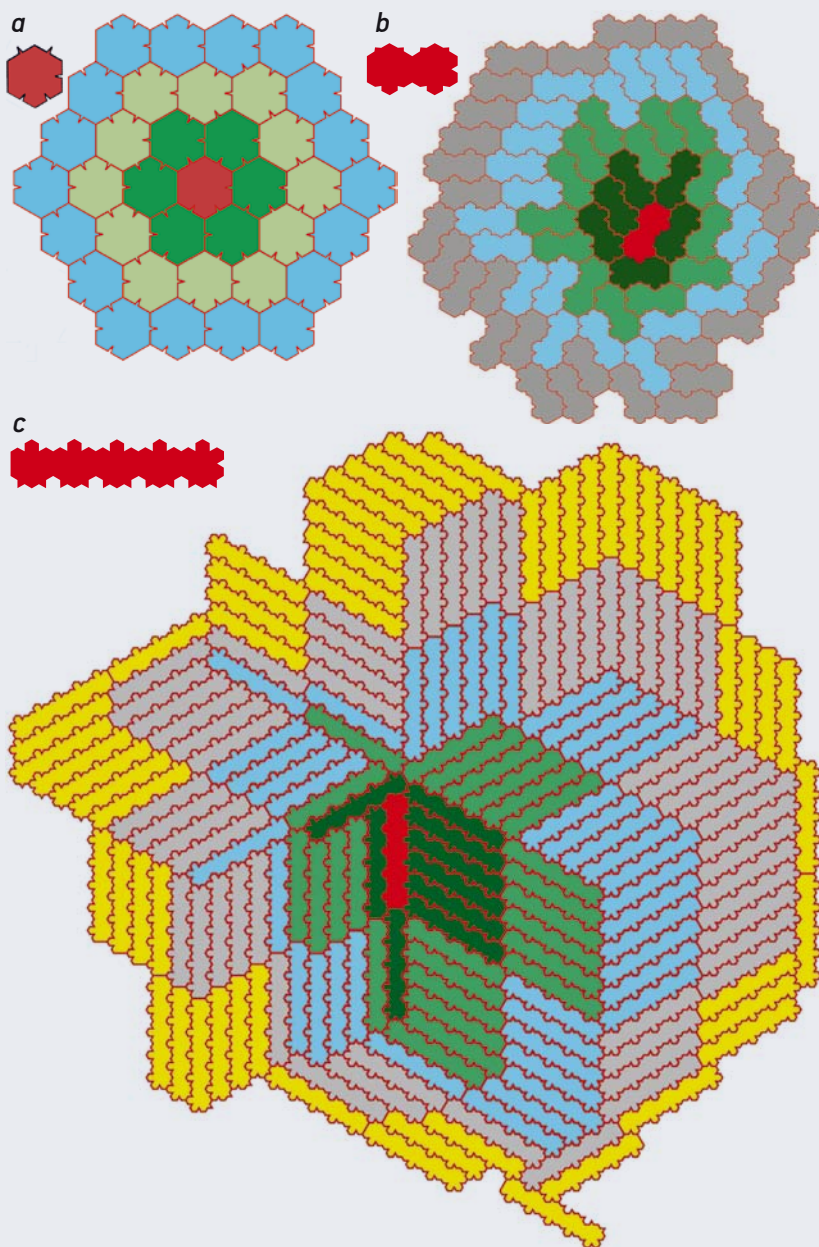


Le record actuel : cinq couronnes

L'Américain Robert Ammann a découvert en 1991 le premier pavé ayant un nombre de Heesch égal à 3 (a). Casey Mann, dans le cadre de sa thèse de doctorat soutenue en 2001 à l'Université de l'Arkansas, a fait mieux en construisant un pavé (b) à quatre couronnes (nombre de Heesch égal à 4). Enfin, le record

mondial est jusqu'ici détenu par un pavé également découvert par Casey Mann (c). Son nombre de Heesch est égal à 5. Ce pavé est extensible (on peut l'allonger autant que l'on souhaite) et a toujours un nombre de Heesch égal à 5, pourvu qu'il soit composé d'au moins quatre hexagones de base.



11 carrés et il n'y a que trois façons de faire les deux couronnes. Elles ne diffèrent que par la position de deux pavés.

L'année où Anne Fontaine trouvait sa famille infinie de pavés ayant un nombre de Heesch égal à 2, l'Américain Robert Ammann, un amateur de divertissements mathématiques auteur de plusieurs travaux notables concernant les pavages du plan, découvrit un pavé dont le nombre de Heesch est égal à 3. Il s'agit d'un hexagone creusé sur deux côtés et muni d'une petite bosse sur trois autres côtés. Les creux, par exemple triangulaires, s'ajustent parfaitement aux bosses (voir l'encadré ci-contre, a). C'est en généralisant ce type de constructions qu'on a su dépasser le record de 3.

Lors de sa thèse soutenue à l'Université de l'Arkansas en 2001, Casey Mann, aujourd'hui en poste à l'Université de Washington, a entrepris l'étude systématique des trous et des bosses dans des formes pavant le plan à la recherche de pavés dont le nombre de Heesch dépasse 3. Il s'est intéressé à trois types de formes : celles composées de carrés accolés par leurs côtés (les polyominos), celles composées d'hexagones accolés et celles composées de triangles équilatéraux accolés. En ajoutant des bosses et des creux complémentaires entre eux sur certains côtés de ces formes, on obtient des pavés, que Casey Mann dénomme poly-formes, dont le nombre de Heesch dépasse souvent 2.

Indécidabilité

Le résultat qui justifie la méthode et fait croire en son potentiel est le suivant : si P est une poly-forme dont n côtés sont munis d'une bosse et m côtés comportent un creux complémentaire de la bosse, et si m et n sont différents, alors le nombre de Heesch de P est fini (P ne pave pas le plan).

Ce résultat fournit un procédé d'énumération de pavés candidats qui ne pavent pas le plan et qui sont donc susceptibles de battre le record de Ammann. Notons d'ailleurs que le pavé de Ammann est une poly-forme : un hexagone où $m = 3$ et $n = 2$.

Le cas particulier obtenu en accolant k hexagones en ligne et en les munissant

de $2k$ bosses et de $(2k + 1)$ creux (une telle forme se dénomme k -hexapilier) a permis de battre le record de Robert Ammann : Casey Mann a prouvé que le nombre de Heesch des 2 et 3-hexapiliers est 4 et que le nombre de Heesch des k -hexapiliers où $k > 3$ est égal à 5 (voir l'encadré page ci-contre, c).

Casey Mann poursuit son étude systématique en cherchant à dénombrer les poly-formes en fonction de leur nombre de Heesch. Le projet est difficile car, même pour un petit nombre de côtés, les combinaisons possibles pour placer les creux et les bosses sont extrêmement nombreuses. Des milliers d'heures de calculs ont déjà été utilisées pour les décomptes.

Pour tout nombre de Heesch, des pavés ?

Pour l'instant, le record de 5 n'a pas été battu, mais selon Casey Mann, cela sera probablement le cas. Il pense en effet que, pour tout n , on trouvera des pavés ayant un nombre de Heesch supérieur à n . Cette conjecture affirmant l'existence de pavés dotés d'un nombre de Heesch aussi grand qu'on le veut est parmi les plus difficiles de la géométrie des pavages. Elle est liée à un autre problème important de la théorie des pavages, lui aussi non résolu.

Ce problème consiste à se demander si un pavé donné (qu'on prendra polygonal pour simplifier) pave le plan, et à rechercher un algorithme qui, à chaque fois qu'on lui soumettrait un tel pavé, calculerait (sans se tromper, bien sûr) la réponse, *oui* ou *non*. Dans le cas de plusieurs pavés (on se donne une famille finie de pavés polygonaux et on cherche à déterminer s'ils pavent le plan) la réponse est connue : il n'existe aucun algorithme réalisant ce travail. Cette « indécidabilité du problème du pavage » pour plusieurs pavés a été démontrée en 1966 par l'Américain Robert Berger.

Pour un seul pavé, la réponse est inconnue : on ignore s'il existe un algorithme infallible indiquant si un pavé polygonal pave ou non le plan.

Cependant, on montre que si le problème du pavage pour un pavé polygonal est indécidable, alors il n'existera pas de borne finie

pour le nombre de Heesch. Résoudre la conjecture concernant la décidabilité algorithmique du pavage par un polygone résoudrait donc la conjecture concernant le nombre de Heesch.

De nombreuses variantes du problème de Heesch ont été étudiées et parfois entièrement résolues.

Sur la sphère, peu de résultats sont connus. Le plus avancé est donné par un pavé, un triangle équilatéral d'angle 75° , dont le nombre de Heesch est 3. Dans les espaces euclidiens de dimension 3 ou plus, on sait limiter le nombre de Heesch (on place des bosses et des creux), mais pour l'instant, on n'a pas trouvé de formes ayant un nombre de Heesch supérieur à 5.

Si, au lieu de se placer sur le plan euclidien, on se place sur le plan hyperbolique, Alexey Tarasov de l'Académie des sciences de Russie a prouvé en 2010 que le nombre de Heesch d'un pavé peut être fini et aussi grand qu'on le veut. Il est assez étrange que le problème de Heesch soit plus facile sur le plan hyperbolique que sur le plan euclidien !

Pourquoi certains problèmes à l'énoncé simple, que tout le monde comprend, sont-ils aussi ardues ? Pourquoi nos puissantes machines explorant des millions de combinaisons par seconde échouent-elles à nous éclairer plus rapidement ? C'est l'un des mystères les plus profonds des mathématiques ; mais c'est aussi ce qui fait leur intérêt et leur charme : à chaque pas, même quand on se croit en terrain conquis, un obstacle inopiné surgit devant nous, exigeant des jours, des mois, des années ou des siècles de travail.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

C. Mann et B. Thomas, **Heesch number of edge-marked polyform**, à paraître, 2015.

A. Akhmedov, **Cayley graphs with an infinite Heesch number**, prépublication arXiv:1412.0358, 2014.

A. Tarasov, **On the Heesch number for the hyperbolic plane**, *Mathematical Notes*, vol. 88(1-2), pp. 97-102, 2010.

C. Mann, **Heesch's tiling problem**, *American Mathematical Monthly*, vol. 111(6), pp. 509-517, 2004.

Références supplémentaires sur le site www.pourlascience.fr



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

DES NOUVELLES DES GRAPHS-ALLUMETTES

L'article sur les graphes-allumettes (*Pour la Science*, novembre 2014) a inspiré un lecteur qui a étendu le catalogue connu de ces graphes particuliers et délicats à classer. Le résultat du colossal travail d'Alexis Vaisse se trouve sur :

<http://alexis.vaisse.monsite-orange.fr/page-54b81c6bc01a2.html>

Dans les dénombrements qu'il a réalisés, Alexis Vaisse trouve 2008 graphes-allumettes à 10 arcs, qui s'organisent en 33 catégories. Pour ceux qui souhaiteraient vérifier le travail, le prolonger ou l'utiliser, diverses données et programmes concernant ces graphes sont disponibles sur la page web indiquée. Alexis Vaisse a entrepris de poursuivre le catalogue en traitant les graphes-allumettes à 11, 12 ou 13 arcs.