

de $2k$ bosses et de $(2k + 1)$ creux (une telle forme se dénomme k -hexapilier) a permis de battre le record de Robert Ammann : Casey Mann a prouvé que le nombre de Heesch des 2 et 3-hexapiliers est 4 et que le nombre de Heesch des k -hexapiliers où $k > 3$ est égal à 5 (voir l'encadré page ci-contre, c).

Casey Mann poursuit son étude systématique en cherchant à dénombrer les poly-formes en fonction de leur nombre de Heesch. Le projet est difficile car, même pour un petit nombre de côtés, les combinaisons possibles pour placer les creux et les bosses sont extrêmement nombreuses. Des milliers d'heures de calculs ont déjà été utilisées pour les décomptes.

Pour tout nombre de Heesch, des pavés ?

Pour l'instant, le record de 5 n'a pas été battu, mais selon Casey Mann, cela sera probablement le cas. Il pense en effet que, pour tout n , on trouvera des pavés ayant un nombre de Heesch supérieur à n . Cette conjecture affirmant l'existence de pavés dotés d'un nombre de Heesch aussi grand qu'on le veut est parmi les plus difficiles de la géométrie des pavages. Elle est liée à un autre problème important de la théorie des pavages, lui aussi non résolu.

Ce problème consiste à se demander si un pavé donné (qu'on prendra polygonal pour simplifier) pave le plan, et à rechercher un algorithme qui, à chaque fois qu'on lui soumettrait un tel pavé, calculerait (sans se tromper, bien sûr) la réponse, *oui* ou *non*. Dans le cas de plusieurs pavés (on se donne une famille finie de pavés polygonaux et on cherche à déterminer s'ils pavent le plan) la réponse est connue : il n'existe aucun algorithme réalisant ce travail. Cette « indécidabilité du problème du pavage » pour plusieurs pavés a été démontrée en 1966 par l'Américain Robert Berger.

Pour un seul pavé, la réponse est inconnue : on ignore s'il existe un algorithme infallible indiquant si un pavé polygonal pave ou non le plan.

Cependant, on montre que si le problème du pavage pour un pavé polygonal est indécidable, alors il n'existera pas de borne finie

pour le nombre de Heesch. Résoudre la conjecture concernant la décidabilité algorithmique du pavage par un polygone résoudrait donc la conjecture concernant le nombre de Heesch.

De nombreuses variantes du problème de Heesch ont été étudiées et parfois entièrement résolues.

Sur la sphère, peu de résultats sont connus. Le plus avancé est donné par un pavé, un triangle équilatéral d'angle 75° , dont le nombre de Heesch est 3. Dans les espaces euclidiens de dimension 3 ou plus, on sait limiter le nombre de Heesch (on place des bosses et des creux), mais pour l'instant, on n'a pas trouvé de formes ayant un nombre de Heesch supérieur à 5.

Si, au lieu de se placer sur le plan euclidien, on se place sur le plan hyperbolique, Alexey Tarasov de l'Académie des sciences de Russie a prouvé en 2010 que le nombre de Heesch d'un pavé peut être fini et aussi grand qu'on le veut. Il est assez étrange que le problème de Heesch soit plus facile sur le plan hyperbolique que sur le plan euclidien !

Pourquoi certains problèmes à l'énoncé simple, que tout le monde comprend, sont-ils aussi ardues ? Pourquoi nos puissantes machines explorant des millions de combinaisons par seconde échouent-elles à nous éclairer plus rapidement ? C'est l'un des mystères les plus profonds des mathématiques ; mais c'est aussi ce qui fait leur intérêt et leur charme : à chaque pas, même quand on se croit en terrain conquis, un obstacle inopiné surgit devant nous, exigeant des jours, des mois, des années ou des siècles de travail.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

C. Mann et B. Thomas, **Heesch number of edge-marked polyform**, à paraître, 2015.

A. Akhmedov, **Cayley graphs with an infinite Heesch number**, prépublication arXiv:1412.0358, 2014.

A. Tarasov, **On the Heesch number for the hyperbolic plane**, *Mathematical Notes*, vol. 88(1-2), pp. 97-102, 2010.

C. Mann, **Heesch's tiling problem**, *American Mathematical Monthly*, vol. 111(6), pp. 509-517, 2004.

Références supplémentaires sur le site www.pourlascience.fr



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

DES NOUVELLES DES GRAPHS-ALLUMETTES

L'article sur les graphes-allumettes (*Pour la Science*, novembre 2014) a inspiré un lecteur qui a étendu le catalogue connu de ces graphes particuliers et délicats à classer. Le résultat du colossal travail d'Alexis Vaisse se trouve sur :

<http://alexis.vaisse.monsite-orange.fr/page-54b81c6bc01a2.html>

Dans les dénombrements qu'il a réalisés, Alexis Vaisse trouve 2008 graphes-allumettes à 10 arcs, qui s'organisent en 33 catégories. Pour ceux qui souhaiteraient vérifier le travail, le prolonger ou l'utiliser, diverses données et programmes concernant ces graphes sont disponibles sur la page web indiquée. Alexis Vaisse a entrepris de poursuivre le catalogue en traitant les graphes-allumettes à 11, 12 ou 13 arcs.