

les plus optimistes, ne franchira la seconde étape que quarante ans après la première.

Pour les jeux du type poker, du fait de l'information partielle disponible aux joueurs et du facteur chance, les stratégies optimales ne consistent pas en des règles déterministes du type « Si votre jeu est J, que les cartes découvertes sur la table sont D et que votre adversaire vient d'enchérir, alors vous devez suivre », mais en des règles probabilistes : « Si votre jeu est J, que les cartes découvertes sur la table sont D et que votre adversaire vient d'enchérir, alors vous devez suivre dans 20 % des cas, et renoncer dans 80 % des cas ».

La détermination des bonnes probabilités pour chaque situation de jeu est délicate et exige plus de calculs que ceux qu'on ferait pour un jeu à information complète sans

hasard ayant le même nombre de situations de jeu. Pour le poker HULHE, il y a d'ailleurs un nombre colossal de situations de jeu. Après suppression des symétries, on en dénombre $3,19 \times 10^{14}$ (319 mille milliards). On comprend pourquoi ce poker élémentaire (comparé aux versions sans limites de mise et à plus de deux joueurs) a été difficile à traiter. C'est la première fois que l'on résout fortement un jeu véritablement pratiqué par de nombreux joueurs où le hasard intervient et où les joueurs ne disposent que partiellement de l'information sur les distributions.

À vrai dire, la résolution forte du poker HULHE n'a été obtenue qu'à « epsilon près » : la stratégie probabiliste de jeu calculée par l'équipe de Michael Bowling ne peut être battue de manière nette par aucun joueur qui affronterait le programme pendant une

durée humainement envisageable. Le résultat exact est : un joueur jouant 200 parties par heure durant 12 heures chaque jour pendant 70 ans ne peut pas faire la différence, avec une certitude de 95 %, entre la stratégie optimale à epsilon près calculée par l'équipe de Michael Bowling et la stratégie réellement optimale.

D'une certaine façon d'ailleurs la stratégie probabiliste optimale n'est pas calculable, puisqu'elle demanderait la détermination d'une grande quantité de nombres réels (les probabilités liées à chacune des situations de jeu) avec une précision infinie. Le petit décalage entre ce qui a été calculé et la solution mathématique parfaite est donc sans grande importance, et il n'y a pas d'abus à considérer que la solution à epsilon près résout de manière forte le poker HULHE.

La stratégie optimale pour le micro-

Le jeu de micro-poker (poker AKQ) prouve que bluffer est parfois utile et que ce n'est pas une question de psychologie, mais un résultat de la théorie des jeux. Dans ce poker à trois cartes, il y a deux joueurs (A et B) et trois cartes notées 1, 2 et 3 symbolisant les trois cartes Q, K, A (figurées ci-dessous) de l'intitulé du jeu. La carte 3 bat les cartes 2 et 1, la carte 2 bat la carte 1. Au départ, chaque joueur engage un euro. Cela constitue un pot de deux euros. On distribue une carte à chaque joueur.

Chacun regarde sa carte. Le joueur A indique s'il enchérit en engageant un autre euro. S'il n'enchérit pas, B prend le pot (et gagne donc un euro). Si A a enchéri, c'est au tour de B de dire s'il enchérit en ajoutant un second euro, ou non. Si B n'enchérit pas, A prend le pot (et gagne donc un euro). Si B enchérit, il y a maintenant quatre euros dans le pot. Les joueurs montrent alors leur carte. Celui qui a la plus forte emporte le pot.

Analyse du jeu

La seule décision prise par le joueur A (de même pour B) est d'enchérir ou non en fonction de la carte qu'il a reçue. Pour A, il y a trois situations A_1 , A_2 et A_3 selon qu'il a reçu la carte 1, 2 ou 3, et pour B, il y a de même trois situations B_1 , B_2 et B_3 .

Les seules parties possibles sont :

A_1/B_2 , A_1/B_3 , A_2/B_1 , A_2/B_3 , A_3/B_1 et A_3/B_2 .

Certaines décisions sont évidentes à prendre. Dans la situation A_3 , A choisira d'enchérir (il est certain de gagner). Dans la situation B_1 , B choisira de ne pas enchérir (il est certain de perdre). Dans la situation B_3 , B choisira d'enchérir (il est certain de gagner). Dans la situation A_2 , le joueur A doit enchérir. En effet :

Si A enchérit, alors : si B a la carte 1, B n'enchérira pas, et donc A gagnera un euro ; et si B a la carte 3, B enchérira et par conséquent A perdra deux euros. Cela fait pour A une perte moyenne de 1/2 euro par coup.

Si A n'enchérit pas, alors A perd un euro par coup. C'est plus que 1/2 euro.

Il reste deux cas à analyser. Dans la situation A_1 , le joueur A doit-il bluffer en enchérissant, et dans la situation B_2 , le joueur B doit-il risquer de perdre deux euros en enchérissant ? Il n'y a pas de réponse déterministe à ces deux

questions et pour y répondre il faut utiliser les stratégies mixtes de von Neumann : A et B choisiront de bluffer ou d'enchérir avec une certaine probabilité. Notons p la probabilité avec laquelle A doit enchérir dans la situation A_1 pour jouer au mieux. Notons q la probabilité avec laquelle B doit enchérir dans la situation B_2 pour jouer au mieux.

La théorie des jeux enseigne que dans le cas de stratégies optimales pour A et B, les valeurs p et q correspondent à un équilibre de Nash, autrement dit à une situation où :

- Si A change de stratégie (c'est-à-dire la valeur de p), le joueur B peut ajuster la sienne (la valeur de q) de telle façon que A gagne moins (autrement dit, A n'a pas intérêt à changer).

- Même chose en échangeant A et B.

