

Le casse-tête mathématique de



Il paraît qu'en ville, on n'est jamais à plus de quelques mètres d'un rat. Mais de nos jours, il est encore plus probable que l'on ne soit jamais à plus de quelques mètres de quelqu'un qui joue à Candy Crush Saga. C'est actuellement le jeu le plus populaire sur Facebook. Il a été téléchargé et installé sur des téléphones, des tablettes et des ordinateurs plus d'un demi-milliard de fois. Essentiellement sur la base de ce succès, son développeur Global King a récemment été introduit à la Bourse de New York avec une valorisation initiale de plusieurs milliards de dollars. Pas mal pour un petit jeu consistant simplement à échanger des bonbons virtuels pour former des chaînes d'au moins trois pièces identiques!

Une grande partie de l'attrait de Candy Crush pour les joueurs est liée à la complexité qui sous-tend ce passe-temps apparemment si simple. De façon surprenante,

le jeu est aussi intéressant pour les chercheurs : il apporte un éclairage original sur l'un des problèmes ouverts les plus importants des mathématiques, ainsi que sur la sécurité des systèmes informatiques.

J'ai récemment démontré que Candy Crush est, sur le plan calculatoire, un casse-tête difficile à résoudre (*voir la bibliographie*). Pour ce faire, j'ai dû recourir à l'un des concepts les plus beaux et les plus importants de l'informatique : l'idée de réduction de problème. Il s'agit de transformer un problème en un autre, ou, comme les informaticiens aiment à dire, réduire un problème à un autre. Essentiellement, ce concept découle de la polyvalence du code informatique : on peut utiliser le même type de code pour résoudre plus d'un problème, même si les variables diffèrent. Si le problème initial est difficile, alors le problème auquel on

le réduit est au moins aussi difficile. Le second problème ne peut pas être plus facile, parce que tout programme informatique qui le résout résout aussi le premier. Et si l'on peut prouver l'inverse, c'est-à-dire que le second problème peut également être réduit au premier, alors les deux problèmes sont d'une certaine manière aussi difficiles l'un que l'autre, et prennent autant de temps à résoudre.

Déterminer la difficulté d'un problème est fondamental. Si l'on peut classer un problème en fonction de la difficulté à le résoudre, on sait avec quelle puissance de calcul l'attaquer, et on peut éventuellement déterminer que ce n'est même pas la peine d'essayer de le résoudre. À certains égards, au moins pour les mathématiciens, se pencher sur Candy Crush en tant que problème mathématique peut être aussi addictif que d'y jouer.

Candy Crush

Derrière ce jeu tout simple en apparence se dissimulent des problèmes calculatoires difficiles. C'est probablement pourquoi Candy Crush est aussi addictif.

Toby Walsh



Dans notre analyse de Candy Crush, mes collègues et moi sommes partis de la classe la plus célèbre de problèmes présentant des défis calculatoires, les problèmes dits NP (pour *Nondeterministic Polynomial time*, « temps polynomial non déterministe »), le « temps » se référant à la durée requise pour la résolution.

Solutions difficiles, vérifications faciles

Par définition, la classe NP contient tous les problèmes pour lesquels, si une solution est proposée, on peut rapidement vérifier si elle est correcte, en un temps qui est une fonction polynomiale de la taille des données du problème (par exemple, un temps proportionnel à N^2 , où N est la taille des données). En revanche, l'étape consistant à trouver la

solution d'un problème de classe NP est parfois un défi calculatoire.

Appartiennent à cette classe de nombreux problèmes mathématiques célèbres, tels que déterminer si une formule logique complexe peut être satisfaite, ou si un graphe peut être colorié de telle façon que des nœuds voisins aient des couleurs différentes.

Au-dessous de la classe NP, en termes de complexité, on a la classe P (incluse dans la classe NP) de problèmes « faciles » sur le plan du calcul. Dans ce cas, le P signifie simplement « polynomial ». La classe P contient des problèmes tels qu'ordonner une liste ou trouver un item dans une base de données. Le temps que mettra un programme informatique efficace à résoudre de tels problèmes est court, même dans les pires cas. Plus précisément, le temps de résolution d'un problème de classe P est un polynôme en N , la taille des données

L'ESSENTIEL

■ Candy Crush est un jeu électronique pratiqué par des centaines de millions de personnes.

■ L'auteur a proposé en 2014 une preuve que ce jeu appartient à une classe de problèmes difficiles sur le plan calculatoire, les problèmes « NP-difficiles ».

■ Pour ce faire, Toby Walsh a établi l'équivalence de Candy Crush avec un problème de logique connu pour être de cette classe.

■ La complexité de Candy Crush contribue probablement à l'attrait de ce jeu et à son caractère addictif.

© 2014 King.com Ltd

du problème. Par exemple, un célèbre algorithme de tri, le tri à bulles, fait remonter progressivement les plus grands éléments d'une liste par une succession de comparaisons deux à deux. Ce processus prend un temps qui augmente comme le carré du nombre d'éléments de la liste. Même si l'on doublait la longueur de la liste, l'algorithme mettrait dans le pire des cas quatre fois plus longtemps (ce « pire cas » se produit quand la liste est dans l'ordre inverse).

Au-dessus du niveau NP de complexité figurent les problèmes extrêmement difficiles sur le plan calculatoire. Il existe même des problèmes pour lesquels notre modèle de calcul standard, celui que tous les ordinateurs implémentent,

L'AUTEUR



Toby WALSH est chercheur au NICTA (National Information Communications Technology Australia) et professeur d'intelligence artificielle à l'université de Nouvelle-Galles du Sud, en Australie.

Article publié avec l'aimable autorisation de la revue *American Scientist*.

est inadéquat. Pour de tels problèmes, il n'existe pas de programme informatique dont on ait l'assurance qu'il va s'arrêter de tourner et donner un résultat. Ces exemples s'inscrivent dans la classe des problèmes dits indécidables. Cette classe inclut des questions telles que décider si un programme informatique va s'arrêter plutôt que de continuer à tourner indéfiniment en boucle, ce que les informaticiens nomment le « problème de l'arrêt ». Alan Turing, pionnier de l'informatique, a prouvé que le problème de l'arrêt est indécidable : il n'existe aucun programme informatique qui puisse, pour tout programme, indiquer s'il s'arrêtera ou non.

La classe NP se situe juste à la frontière entre « facile » et « difficile ». On y trouve, notamment, de nombreux problèmes représentant un défi, tels que l'organisation des tournées de livraison de colis, du tableau de service pour un hôpital ou de l'emploi du temps d'un lycée. Il s'avère que gagner à Candy Crush s'inscrit dans ce sous-ensemble de NP. L'un quelconque de ces problèmes peut être réduit à n'importe quel autre d'entre eux. En ce sens, ils sont tous d'égale difficulté.

Un calcul plus long que l'âge de l'Univers ?

Malheureusement, les meilleurs programmes informatiques dont nous disposons pour les problèmes NP ont un temps d'exécution qui augmente énormément avec la taille des données du problème. Sur mon ordinateur de bureau, j'ai un programme qui met quelques heures à trouver les tournées optimales pour $N = 10$ camionnettes de livraison et à démontrer que cette solution est la meilleure possible. Mais pour $N = 100$ camionnettes, le même programme devrait tourner pendant plus de temps que l'âge de l'Univers. En fait, le temps d'exécution de mon programme est une fonction exponentielle de la taille N du problème, et les exponentielles ont une croissance extrêmement rapide.

Bien que les informaticiens soient généralement d'accord avec moi pour dire que les problèmes NP sont à la limite entre facile et difficile, il n'y a aucun moyen de savoir avec certitude, pour un problème spécifique, de quel côté il se situe. Les meilleurs programmes informatiques actuellement à notre disposition mettent un temps exponentiellement long à résoudre



UNE BOMBE DE COULEUR DÉTRUIT TOUS LES BONBONS VIOLETS de la grille sur cette capture d'écran d'une partie de Candy Crush Saga. L'une des raisons pour lesquelles le jeu est tellement prenant est qu'il est en fait vraiment difficile, au sens mathématique du terme.