

par James Propp, du MIT, qui l'a nommé « rotor-router » en 2005. Plusieurs dizaines d'articles scientifiques et plusieurs thèses lui ont été consacrées.

Commençons par le miracle des cercles parfaits avec la version du rotor-router sur un plan quadrillé. Chaque case du quadrillage est reliée à ses voisins nord, sud, est et ouest, ce qui définit un graphe infini où chaque nœud a quatre voisins.

Initialement, il n'y a aucun rotor, et on dépose les uns après les autres des agents sur une case fixe du plan, dénommée case centrale. Dès qu'un agent trouve une case vide, il y dépose un rotor pointant vers l'ouest, lequel occupe la case. Quand la case

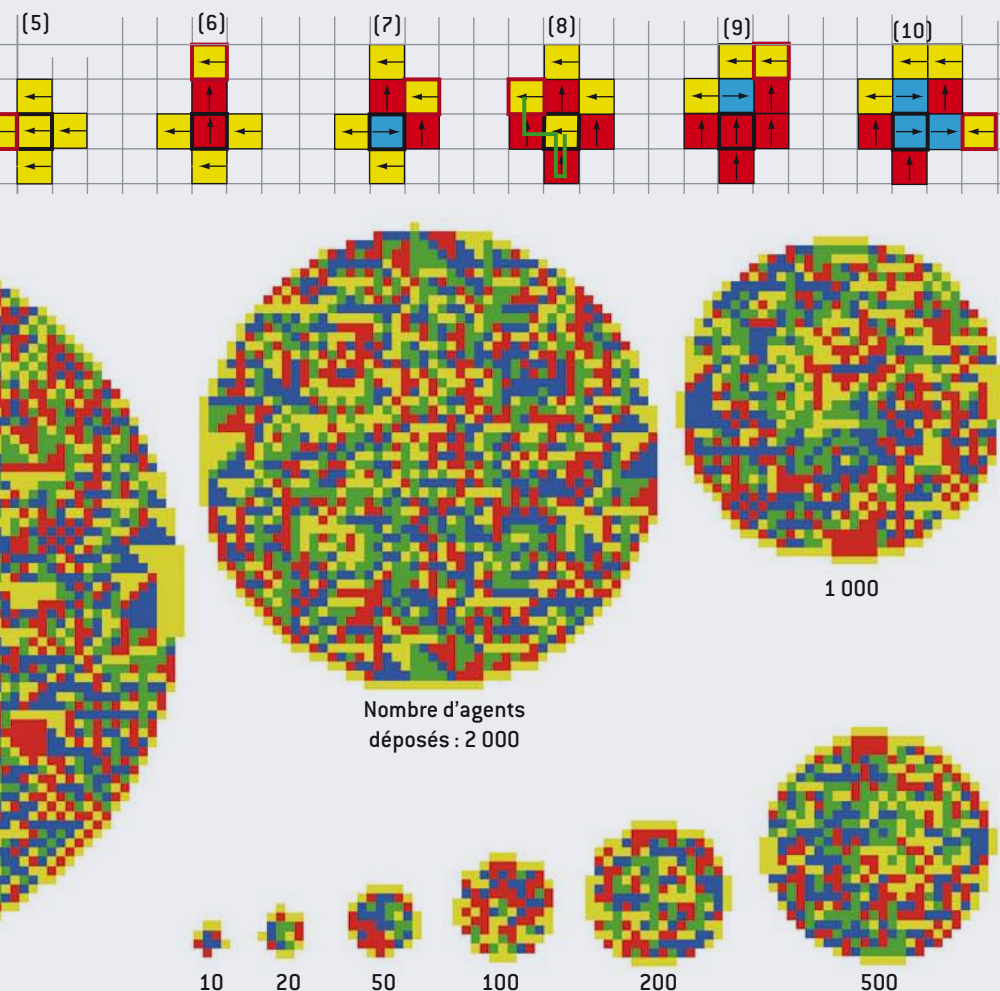
où arrive un agent est occupée (par un agent et le rotor qu'il a déposé), l'agent fait tourner le rotor et suit la direction alors indiquée. Le premier agent déposé s'arrête donc sur la case centrale, le second sur la case au nord de la case centrale, etc. [voir l'encadré ci-dessous]. Petit à petit, des cases du plan sont occupées.

D'un étonnement à l'autre

Ce qu'on voit alors se dérouler suscite de nombreuses surprises (on trouve des programmes pour observer ce processus sur www.cs.uml.edu/~ffjpropp/rotor-router-model/#01 ou <http://rotor-router.mpi-inf.mpg.de/applet/>).

Premier étonnement : jamais un agent ne tourne en rond indéfiniment, tous finissent par trouver une case vide où s'arrêter. La propriété se démontre en effectuant un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'un agent se mette à repasser toujours par le même chemin et parcoure donc indéfiniment et périodiquement le même ensemble de cases. L'ensemble des cases de ce circuit est fini et a donc un bord (des cases du circuit adjacentes à des cases n'appartenant pas au circuit). En passant plusieurs fois sur une telle case, l'agent finit par faire pointer le rotor de la

Le rotor-router sur le plan



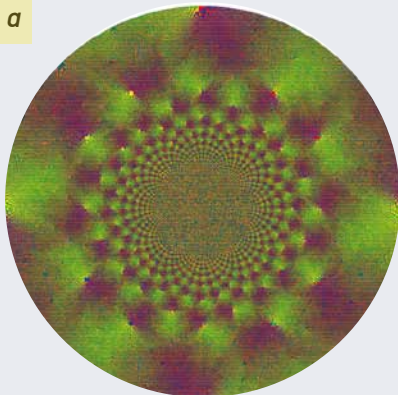
On pose successivement des agents mobiles sur la case centrale (entourée d'un cadre noir) d'un quadrillage infini du plan.

Quand un agent arrive sur une case vide, il y dépose un rotor (une flèche

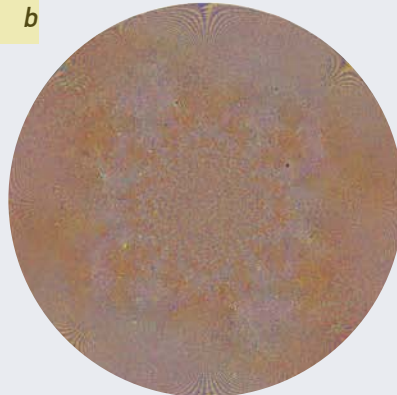
tournante) en l'orientant vers l'ouest et reste sur la case. Ainsi, le premier agent déposé occupe la case centrale (1). Quand la case sur laquelle arrive un agent est occupée, il fait tourner le rotor de 90° dans le sens horaire et suit la direction alors indiquée en se déplaçant d'une case, où le processus recommence (la dernière cellule créée est encadrée de rouge). Le jaune indique que le rotor pointe vers l'ouest, le rouge vers le nord, le bleu vers l'est, le vert vers le sud. Ainsi, l'agent 2 trouve une case centrale occupée, fait tourner son rotor de 90° qui pointe alors vers le nord et y dépose un rotor jaune (2). L'agent 3 trouve la case centrale occupée par un rotor rouge, le fait tourner pour qu'il devienne bleu et se déplace vers l'est, où il dépose un rotor jaune (3). Etc.

Avec ces règles, l'agent revient parfois sur ses pas et fait tourner un rotor plusieurs fois (trajet vert de l'étape (8)). La zone occupée par des agents arrêtés s'étend, mais est de plus en plus arrondie.

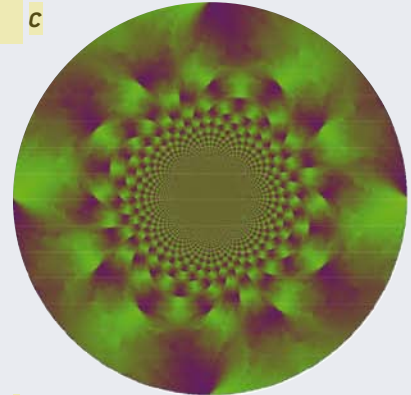
Les moirages



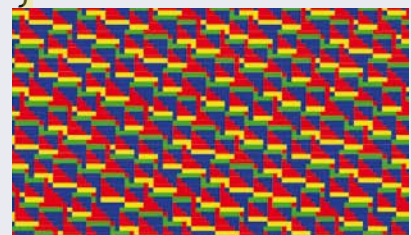
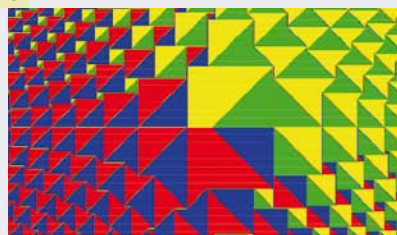
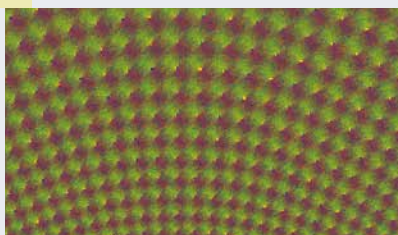
Rotor-router à quatre directions, pour 3,14 millions d'agents



Rotor-router à huit directions, pour 3,14 millions d'agents



Rotor-router à quatre directions, pour 10 milliards d'agents



Agrandissements de l'image c

case vers une case n'appartenant pas au circuit, et sort donc du circuit... ce qui est une contradiction.

Deuxième étonnement : jamais aucune case n'est oubliée. Tout le plan se couvre d'agents arrêtés sans qu'il y ait de trou. Cela se démontre encore assez simplement. La case centrale enverra des agents sur ses quatre voisines une infinité de fois, car son rotor tourne à chaque nouvel agent déposé. Chaque case adjacente à la case centrale (nous les nommerons *cases de second niveau*) sera donc visitée une infinité de fois, et donc les rotors qui s'y trouvent tourneront une infinité de fois. Toutes les cases adjacentes à ces cases (*cases de troisième niveau*) seront donc visitées elles aussi une infinité de fois. Il en va de même pour les cases adjacentes à ces cases (*cases de quatrième niveau*), etc. De proche en proche, toute case du plan est concernée et voit donc passer une infinité d'agents.

Troisième étonnement : le dessin formé par les cases occupées est étonnamment rond. Le quadrillage du plan n'est pas du tout isotrope, puisque l'horizontale et la verticale y jouent des rôles privilégiés ; il est donc inattendu de voir apparaître la forme isotrope d'un disque !

Des disques de plus en plus parfaits

Certains affirment cependant que ce rond n'est pas une surprise. Pour eux, les agents qui partent de l'origine suivent des chemins qui changent toujours (à cause des rotors) et qui traitent donc uniformément toutes les directions possibles, ce qui dessine nécessairement un rond. Sous cette forme, l'argument est assez vague, et d'ailleurs d'autres mécanismes proches de celui du rotor-router ne dessinent que des cercles imparfaits, alors qu'on pourrait argumenter de la même façon. En mesurant leur

rotondité par un procédé mathématique (le rapport des rayons des cercles inscrit et circonscrit à toutes les cases occupées), on reconnaît que ce qui se passe pour le rotor-router est un rond bien plus précis que ceux dessinés par ses concurrents. À trois dimensions ou plus, le mécanisme du rotor-router engendre des sphères, elles aussi presque parfaites.

Les mathématiciens se sont mis au travail et on dispose aujourd'hui de démonstrations que le rotor-router produit les ronds observés ! Les résultats les plus fins sont dus à Lionel Levine, de l'université de Californie à Berkeley, et à Yuval Peres, des laboratoires de Microsoft à Redmond. En 2009, ils ont établi que l'ensemble des cases occupées par les agents quand n agents se sont arrêtés contient un disque de rayon r_n (disque inscrit), et est contenu dans un disque de rayon r'_n (disque circonscrit) et que le rapport r_n/r'_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Leurs