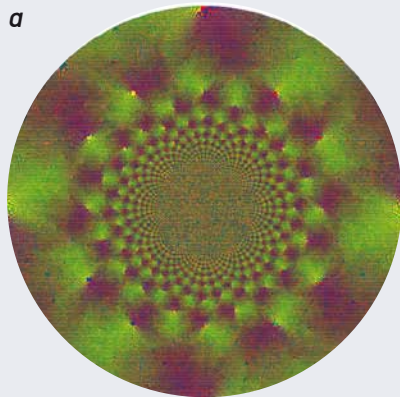
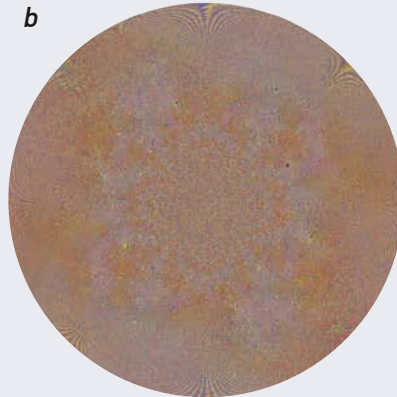


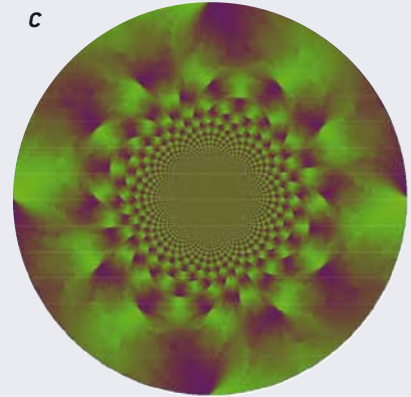
Les moirages



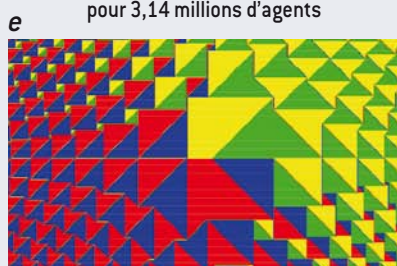
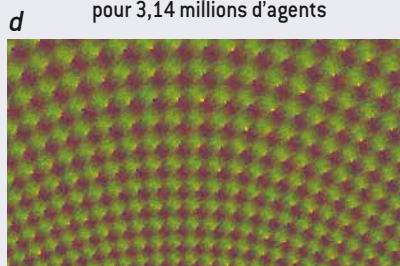
Rotor-router à quatre directions,
pour 3,14 millions d'agents



Rotor-router à huit directions,
pour 3,14 millions d'agents



Rotor-router à quatre directions,
pour 10 milliards d'agents



Agrandissements de l'image c

case vers une case n'appartenant pas au circuit, et sort donc du circuit... ce qui est une contradiction.

Deuxième étonnement : jamais aucune case n'est oubliée. Tout le plan se couvre d'agents arrêtés sans qu'il y ait de trou. Cela se démontre encore assez simplement. La case centrale enverra des agents sur ses quatre voisines une infinité de fois, car son rotor tourne à chaque nouvel agent déposé. Chaque case adjacente à la case centrale (nous les nommerons *cases de second niveau*) sera donc visitée une infinité de fois, et donc les rotors qui s'y trouvent tourneront une infinité de fois. Toutes les cases adjacentes à ces cases (*cases de troisième niveau*) seront donc visitées elles aussi une infinité de fois. Il en va de même pour les cases adjacentes à ces cases (*cases de quatrième niveau*), etc. De proche en proche, toute case du plan est concernée et voit donc passer une infinité d'agents.

Troisième étonnement : le dessin formé par les cases occupées est étonnamment rond. Le quadrillage du plan n'est pas du tout isotrope, puisque l'horizontale et la verticale y jouent des rôles privilégiés ; il est donc inattendu de voir apparaître la forme isotrope d'un disque !

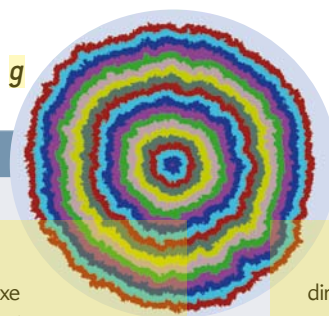
Des disques de plus en plus parfaits

Certains affirment cependant que ce rond n'est pas une surprise. Pour eux, les agents qui partent de l'origine suivent des chemins qui changent toujours (à cause des rotors) et qui traitent donc uniformément toutes les directions possibles, ce qui dessine nécessairement un rond. Sous cette forme, l'argument est assez vague, et d'ailleurs d'autres mécanismes proches de celui du rotor-router ne dessinent que des cercles imparfaits, alors qu'on pourrait argumenter de la même façon. En mesurant leur

rotondité par un procédé mathématique (le rapport des rayons des cercles inscrit et circonscrit à toutes les cases occupées), on reconnaît que ce qui se passe pour le rotor-router est un rond bien plus précis que ceux dessinés par ses concurrents. À trois dimensions ou plus, le mécanisme du rotor-router engendre des sphères, elles aussi presque parfaites.

Les mathématiciens se sont mis au travail et on dispose aujourd'hui de démonstrations que le rotor-router produit les ronds observés ! Les résultats les plus fins sont dus à Lionel Levine, de l'université de Californie à Berkeley, et à Yuval Peres, des laboratoires de Microsoft à Redmond. En 2009, ils ont établi que l'ensemble des cases occupées par les agents quand n agents se sont arrêtés contient un disque de rayon r_n (disque inscrit), et est contenu dans un disque de rayon r'_n (disque circonscrit) et que le rapport r'_n/r_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Leurs

g



Quand on dépose successivement des agents dans la case centrale et qu'ils se déplacent jusqu'à trouver une case vide (règles indiquées dans l'encadré page 77), ils occupent une zone circulaire de plus en plus parfaite. Si les cases sont coloriées en fonction de l'orientation du rotor qui s'y trouve, on observe alors des motifs complexes dont on ne sait pas clairement expliquer la présence, ni même décrire la structure.

Le dessin (a) montre ce coloriage pour le rotor-router à quatre directions. Le dessin (b) montre le coloriage pour un rotor-router à huit directions (chaque flèche tourne d'un huitième de tour à chaque passage d'agent, ce qui désigne une des huit cases entourant la case).

Les dessins (a) et (b) ont été réalisés en faisant circuler 3,14 millions d'agents. Le dessin (c) a été réalisé avec

10 milliards d'agents (à partir de la page <http://rotor-router.mpi-inf.mpg.de/>). Il semble mystérieusement être une version plus lisse, mais identique, du dessin (a) à 3,14 millions d'agents.

Lorsqu'on grossit le dessin (c) obtenu avec 10 milliards d'agents, on observe toutes sortes de structures géométriques aussi régulières qu'inexpliquées (d, e, f).

Quand un graphe infini connexe est donné, qu'on munit chaque nœud d'un rotor et qu'on y dépose un agent, le mécanisme du rotor-router fait qu'il n'existe que deux possibilités : soit l'agent passe une infinité de fois par chaque nœud (cas récurrent), soit il ne passe qu'un nombre fini de fois à chaque nœud (cas transitoire). On montre que pour tout graphe infini connexe, il existe une façon de fixer les positions initiales des rotors de manière à avoir une configuration récurrente.

Pour le dessin (g), on a déposé un rotor dans chaque case du quadrillage du plan au hasard

uniformément dans les quatre directions. La figure représente l'ensemble des

emplacements par lesquels l'agent est passé quand il s'est déplacé 2 milliards de fois. La couleur d'une case a été choisie en fonction du nombre de fois que l'agent a visité la case : plus la case est éloignée du point de départ, plus ce nombre est petit. On conjecture que la forme de la surface occupée devient de plus en plus ronde (comme dans le cas où des agents sont déposés les uns après les autres au centre et qu'ils s'arrêtent quand ils trouvent une case vide). Mais cette conjecture est considérée très difficile et on ignore comment l'aborder aujourd'hui.

résultats donnent des précisions sur la vitesse avec laquelle le rapport converge vers 1 (voir l'article de L. Levine et Y. Peres dans la bibliographie).

La preuve mathématique justifie et témoigne de l'extraordinaire rotondité observée, pourtant, comme elle est compliquée, il est difficile de formuler en quelques mots des arguments qui éclairent vraiment le mystère de la rotondité. Les mathématiques démontrent que ce que l'on voit est réel, mais ne nous persuadent pas qu'il n'y a rien d'étonnant !

Des motifs incompréhensibles

Un quatrième étonnement saisit l'observateur de la figure obtenue après un grand nombre d'étapes. Si l'on colorie les cases en choisissant une couleur par direction possible du rotor, on observe alors des motifs de moirages complexes, évoquant

des fractales qui structurent l'intérieur du disque rempli (voir l'encadré ci-dessus). Aucune explication claire de ce phénomène n'a été proposée, et d'ailleurs il est difficile d'imaginer ce que pourrait être une telle explication, puisqu'on ne sait pas formuler précisément ce qui est à expliquer !

Le comportement observé provoque un cinquième étonnement un peu plus subtil, mais peut-être encore plus puissant. Il provient de la découverte que le mécanisme du rotor-router est « abélien » (on dit aussi « commutatif »). Cela signifie qu'il a la propriété suivante : si une configuration de rotors et d'agents arrêtés est donnée, que l'on fait partir un agent d'un point A jusqu'à ce qu'il s'arrête sur une case vide, puis qu'on fait partir un agent d'un point B jusqu'à ce qu'il s'arrête sur une case vide, alors on obtient la même configuration finale que si on avait fait partir d'abord l'agent du point B, puis l'agent du point A.

Une conséquence remarquable de cette commutativité est que si l'on dépose N agents progressivement au point de départ 0 et qu'on les fait avancer jusqu'à trouver une case vide qu'ils occupent, à chaque fois en attendant que le dernier agent lancé soit arrivé pour faire partir le suivant (procédé conduisant à un disque presque parfait), on arrive exactement à la même configuration que si l'on fait avancer N agents partant de l'origine dans un ordre quelconque sans attendre que chaque agent se soit installé dans une case vide avant d'en faire partir un nouveau.

La raison de s'intéresser au mécanisme du rotor-router sur le plan est qu'il constitue un modèle déterministe de la diffusion centrale : l'étalement à partir d'un point donné d'une série d'effets ou de particules. Si l'on dépose successivement des agents au centre du plan et qu'on leur demande de suivre un chemin aléatoire jusqu'à trouver une case vide, on définit le modèle le