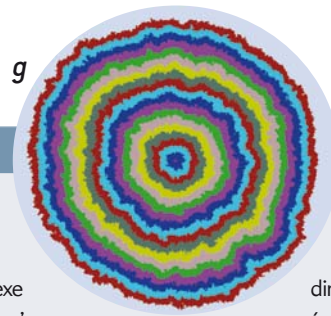


g



Quand on dépose successivement des agents dans la case centrale et qu'ils se déplacent jusqu'à trouver une case vide (règles indiquées dans l'encadré page 77), ils occupent une zone circulaire de plus en plus parfaite. Si les cases sont coloriées en fonction de l'orientation du rotor qui s'y trouve, on observe alors des motifs complexes dont on ne sait pas clairement expliquer la présence, ni même décrire la structure.

Le dessin (a) montre ce coloriage pour le rotor-router à quatre directions. Le dessin (b) montre le coloriage pour un rotor-router à huit directions (chaque flèche tourne d'un huitième de tour à chaque passage d'agent, ce qui désigne une des huit cases entourant la case).

Les dessins (a) et (b) ont été réalisés en faisant circuler 3,14 millions d'agents. Le dessin (c) a été réalisé avec

10 milliards d'agents (à partir de la page <http://rotor-router.mpi-inf.mpg.de/>). Il semble mystérieusement être une version plus lisse, mais identique, du dessin (a) à 3,14 millions d'agents.

Lorsqu'on grossit le dessin (c) obtenu avec 10 milliards d'agents, on observe toutes sortes de structures géométriques aussi régulières qu'inexpliquées (d, e, f).

Quand un graphe infini connexe est donné, qu'on munit chaque nœud d'un rotor et qu'on y dépose un agent, le mécanisme du rotor-router fait qu'il n'existe que deux possibilités : soit l'agent passe une infinité de fois par chaque nœud (cas récurrent), soit il ne passe qu'un nombre fini de fois à chaque nœud (cas transitoire). On montre que pour tout graphe infini connexe, il existe une façon de fixer les positions initiales des rotors de manière à avoir une configuration récurrente.

Pour le dessin (g), on a déposé un rotor dans chaque case du quadrillage du plan au hasard

uniformément dans les quatre directions. La figure représente l'ensemble des

emplacements par lesquels l'agent est passé quand il s'est déplacé 2 milliards de fois. La couleur d'une case a été choisie en fonction du nombre de fois que l'agent a visité la case : plus la case est éloignée du point de départ, plus ce nombre est petit. On conjecture que la forme de la surface occupée devient de plus en plus ronde (comme dans le cas où des agents sont déposés les uns après les autres au centre et qu'ils s'arrêtent quand ils trouvent une case vide). Mais cette conjecture est considérée très difficile et on ignore comment l'aborder aujourd'hui.

résultats donnent des précisions sur la vitesse avec laquelle le rapport converge vers 1 (voir l'article de L. Levine et Y. Peres dans la bibliographie).

La preuve mathématique justifie et témoigne de l'extraordinaire rotondité observée, pourtant, comme elle est compliquée, il est difficile de formuler en quelques mots des arguments qui éclairent vraiment le mystère de la rotondité. Les mathématiques démontrent que ce que l'on voit est réel, mais ne nous persuadent pas qu'il n'y a rien d'étonnant !

Des motifs incompréhensibles

Un quatrième étonnement saisit l'observateur de la figure obtenue après un grand nombre d'étapes. Si l'on colorie les cases en choisissant une couleur par direction possible du rotor, on observe alors des motifs de moirages complexes, évoquant

des fractales qui structurent l'intérieur du disque rempli (voir l'encadré ci-dessus). Aucune explication claire de ce phénomène n'a été proposée, et d'ailleurs il est difficile d'imaginer ce que pourrait être une telle explication, puisqu'on ne sait pas formuler précisément ce qui est à expliquer !

Le comportement observé provoque un cinquième étonnement un peu plus subtil, mais peut-être encore plus puissant. Il provient de la découverte que le mécanisme du rotor-router est « abélien » (on dit aussi « commutatif »). Cela signifie qu'il a la propriété suivante : si une configuration de rotors et d'agents arrêtés est donnée, que l'on fait partir un agent d'un point A jusqu'à ce qu'il s'arrête sur une case vide, puis qu'on fait partir un agent d'un point B jusqu'à ce qu'il s'arrête sur une case vide, alors on obtient la même configuration finale que si on avait fait partir d'abord l'agent du point B, puis l'agent du point A.

Une conséquence remarquable de cette commutativité est que si l'on dépose N agents progressivement au point de départ 0 et qu'on les fait avancer jusqu'à trouver une case vide qu'ils occupent, à chaque fois en attendant que le dernier agent lancé soit arrivé pour faire partir le suivant (procédé conduisant à un disque presque parfait), on arrive exactement à la même configuration que si l'on fait avancer N agents partant de l'origine dans un ordre quelconque sans attendre que chaque agent se soit installé dans une case vide avant d'en faire partir un nouveau.

La raison de s'intéresser au mécanisme du rotor-router sur le plan est qu'il constitue un modèle déterministe de la diffusion centrale : l'étalement à partir d'un point donné d'une série d'effets ou de particules. Si l'on dépose successivement des agents au centre du plan et qu'on leur demande de suivre un chemin aléatoire jusqu'à trouver une case vide, on définit le modèle le