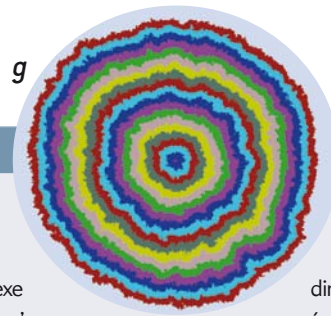


g



Quand on dépose successivement des agents dans la case centrale et qu'ils se déplacent jusqu'à trouver une case vide (règles indiquées dans l'encadré page 77), ils occupent une zone circulaire de plus en plus parfaite. Si les cases sont coloriées en fonction de l'orientation du rotor qui s'y trouve, on observe alors des motifs complexes dont on ne sait pas clairement expliquer la présence, ni même décrire la structure.

Le dessin (a) montre ce coloriage pour le rotor-router à quatre directions. Le dessin (b) montre le coloriage pour un rotor-router à huit directions (chaque flèche tourne d'un huitième de tour à chaque passage d'agent, ce qui désigne une des huit cases entourant la case).

Les dessins (a) et (b) ont été réalisés en faisant circuler 3,14 millions d'agents. Le dessin (c) a été réalisé avec

10 milliards d'agents (à partir de la page <http://rotor-router.mpi-inf.mpg.de/>). Il semble mystérieusement être une version plus lisse, mais identique, du dessin (a) à 3,14 millions d'agents.

Lorsqu'on grossit le dessin (c) obtenu avec 10 milliards d'agents, on observe toutes sortes de structures géométriques aussi régulières qu'inexpliquées (d, e, f).

Quand un graphe infini connexe est donné, qu'on munit chaque nœud d'un rotor et qu'on y dépose un agent, le mécanisme du rotor-router fait qu'il n'existe que deux possibilités : soit l'agent passe une infinité de fois par chaque nœud (cas récurrent), soit il ne passe qu'un nombre fini de fois à chaque nœud (cas transitoire). On montre que pour tout graphe infini connexe, il existe une façon de fixer les positions initiales des rotors de manière à avoir une configuration récurrente.

Pour le dessin (g), on a déposé un rotor dans chaque case du quadrillage du plan au hasard

uniformément dans les quatre directions. La figure représente l'ensemble des

emplacements par lesquels l'agent est passé quand il s'est déplacé 2 milliards de fois. La couleur d'une case a été choisie en fonction du nombre de fois que l'agent a visité la case : plus la case est éloignée du point de départ, plus ce nombre est petit. On conjecture que la forme de la surface occupée devient de plus en plus ronde (comme dans le cas où des agents sont déposés les uns après les autres au centre et qu'ils s'arrêtent quand ils trouvent une case vide). Mais cette conjecture est considérée très difficile et on ignore comment l'aborder aujourd'hui.

résultats donnent des précisions sur la vitesse avec laquelle le rapport converge vers 1 (voir l'article de L. Levine et Y. Peres dans la bibliographie).

La preuve mathématique justifie et témoigne de l'extraordinaire rotondité observée, pourtant, comme elle est compliquée, il est difficile de formuler en quelques mots des arguments qui éclairent vraiment le mystère de la rotondité. Les mathématiques démontrent que ce que l'on voit est réel, mais ne nous persuadent pas qu'il n'y a rien d'étonnant !

Des motifs incompréhensibles

Un quatrième étonnement saisit l'observateur de la figure obtenue après un grand nombre d'étapes. Si l'on colorie les cases en choisissant une couleur par direction possible du rotor, on observe alors des motifs de moirages complexes, évoquant

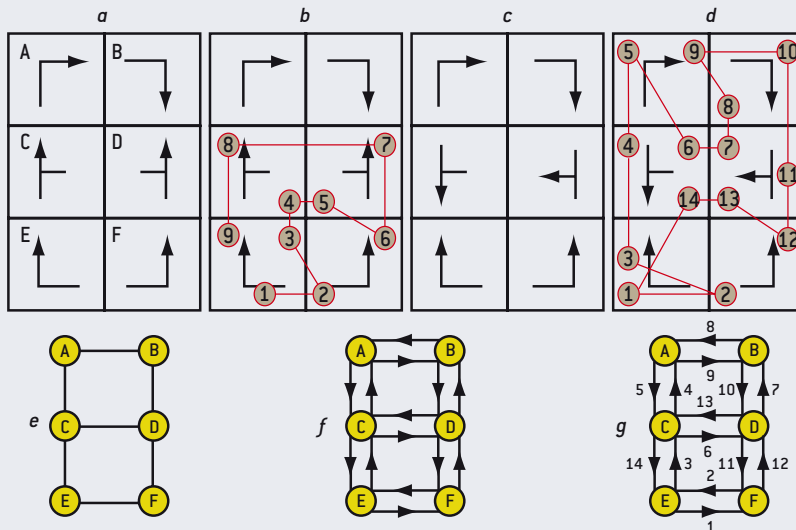
des fractales qui structurent l'intérieur du disque rempli (voir l'encadré ci-dessus). Aucune explication claire de ce phénomène n'a été proposée, et d'ailleurs il est difficile d'imaginer ce que pourrait être une telle explication, puisqu'on ne sait pas formuler précisément ce qui est à expliquer !

Le comportement observé provoque un cinquième étonnement un peu plus subtil, mais peut-être encore plus puissant. Il provient de la découverte que le mécanisme du rotor-router est « abélien » (on dit aussi « commutatif »). Cela signifie qu'il a la propriété suivante : si une configuration de rotors et d'agents arrêtés est donnée, que l'on fait partir un agent d'un point A jusqu'à ce qu'il s'arrête sur une case vide, puis qu'on fait partir un agent d'un point B jusqu'à ce qu'il s'arrête sur une case vide, alors on obtient la même configuration finale que si on avait fait partir d'abord l'agent du point B, puis l'agent du point A.

Une conséquence remarquable de cette commutativité est que si l'on dépose N agents progressivement au point de départ 0 et qu'on les fait avancer jusqu'à trouver une case vide qu'ils occupent, à chaque fois en attendant que le dernier agent lancé soit arrivé pour faire partir le suivant (procédé conduisant à un disque presque parfait), on arrive exactement à la même configuration que si l'on fait avancer N agents partant de l'origine dans un ordre quelconque sans attendre que chaque agent se soit installé dans une case vide avant d'en faire partir un nouveau.

La raison de s'intéresser au mécanisme du rotor-router sur le plan est qu'il constitue un modèle déterministe de la diffusion centrale : l'étalement à partir d'un point donné d'une série d'effets ou de particules. Si l'on dépose successivement des agents au centre du plan et qu'on leur demande de suivre un chemin aléatoire jusqu'à trouver une case vide, on définit le modèle le

Le miracle des circuits eulériens



Un circuit eulérien sur un graphe orienté (où chaque arête est dotée d'un sens de parcours) est un chemin qui revient à son point de départ en ayant parcouru chaque arête du graphe une fois exactement. Un chemin eulérien passe donc aussi par chaque nœud du graphe.

De façon presque magique, le rotor-router découvre automatiquement et rapidement de tels circuits eulériens. Considérons par exemple six cases d'un quadrillage formant un rectangle 2×3 (a). Chaque case est reliée à ses voisins quand elles existent. Cela détermine un graphe non orienté (e) auquel on associe un graphe orienté (f) en dédoublant chaque arête. D'après le théorème d'Euler, un tel graphe possède des circuits eulériens. Nous allons utiliser un rotor-router pour en découvrir un.

Posons un rotor dans chaque case. La case A est par exemple munie d'un rotor à deux positions,

puisque'elle est reliée à deux autres cases (B et C). Orientons les rotors en prenant la première direction disponible à partir de la position nord en tournant dans le sens horaire. Les six rotors et leurs directions initiales sont dessinés en (a). On pose un agent dans la case E, et on le laisse faire selon la règle de fonctionnement des rotor-routers : l'agent fait tourner le rotor de la case dans lequel il se trouve, et suit la direction qu'il indique alors, et recommence dans la nouvelle case. Le parcours de l'agent suit le chemin indiqué en (b) : EFECDFDCE.

Il revient donc dans la case E sans être passé partout. C'est la phase d'ini-

tialisation. Les rotors ont changé de direction et sont maintenant dans les orientations indiquées par le dessin (c). L'agent reprend son cheminement et, cette fois en 14 étapes, revient en E après avoir parcouru un chemin eulérien. À l'issue de ce parcours, il a remis tous les rotors comme ils l'étaient en (c) : il reprendra donc indéfiniment le chemin eulérien découvert (représenté en (d) et en (g)).

Ce qui se produit ici est général. Quel que soit le graphe non orienté initial, un agent sans mémoire, grâce au système des rotors, finit toujours par découvrir un circuit eulérien du graphe orienté associé, qu'il parcourt alors indéfiniment. Cette méthode permet à un amnésique de sortir d'un labyrinthe quelle que soit sa complexité, pourvu qu'il dispose d'une craie pour dessiner l'équivalent des rotors à chaque carrefour.

plus classique de diffusion centrale nommé IDLA (*Internal Diffusion-Limited Aggregation*, ou agrégation interne limitée par la diffusion) introduit en 1992. Les chemins aléatoires peuvent être conçus de plusieurs façons, mais la plus simple consiste pour chaque pas fait par l'agent à lancer un dé à quatre faces et, selon le résultat, à faire se déplacer l'agent d'une case vers le nord, le sud, l'est ou l'ouest.

James Propp présente le rotor-router comme une « dérandomisation » du modèle classique de diffusion centrale, c'est-à-dire comme un modèle aussi proche que possible du modèle IDLA, mais ne dépendant plus du hasard. Bien que déterministe, le modèle du rotor-router a de nombreuses propriétés communes avec le modèle aléatoire, et sous une forme plus nette. Par exemple, dans le modèle aléatoire IDLA, on observe temporairement des trous dans la forme circulaire construite par les agents arrêtés. Ce n'est jamais le cas avec le rotor-router. Autre exemple : la frontière de l'ensemble des cases occupées, dont on démontre aussi qu'elle devient de plus en plus ronde dans le modèle aléatoire, est bien plus lisse avec le rotor-router.

Patrouilles sur un graphe

Le mécanisme du rotor-router a une capacité étonnante à parcourir efficacement un graphe quelconque. On se donne un graphe G non orienté (on ne précise aucun sens de parcours pour les arêtes) à nombre fini de nœuds et d'arêtes. Chaque nœud est muni d'un rotor. On suppose que le graphe est connexe : quels que soient les nœuds A et B du graphe, il existe un chemin allant de A à B. En un nœud quelconque, on pose un agent unique qui se met à suivre les indications des rotors sans jamais s'arrêter, en les faisant tourner à chaque fois qu'il passe. Ce qui se produit est là encore tout à fait remarquable.

Quels que soient le graphe, la position initiale des rotors et l'endroit d'où part l'agent, il visitera chaque nœud une infinité de fois sans en oublier aucun. Pour le démontrer, on note qu'il existe nécessairement un nœud N du graphe qui est