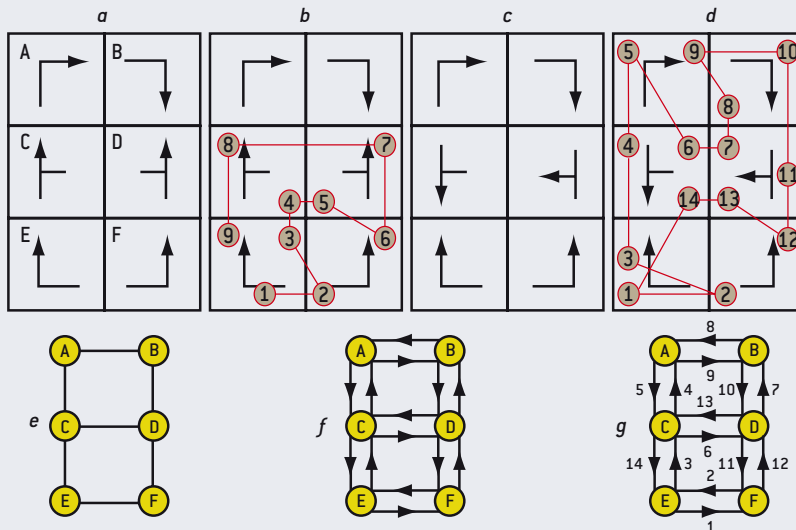


Le miracle des circuits eulériens



Un circuit eulérien sur un graphe orienté (où chaque arête est dotée d'un sens de parcours) est un chemin qui revient à son point de départ en ayant parcouru chaque arête du graphe une fois exactement. Un chemin eulérien passe donc aussi par chaque nœud du graphe.

De façon presque magique, le rotor-router découvre automatiquement et rapidement de tels circuits eulériens. Considérons par exemple six cases d'un quadrillage formant un rectangle 2×3 (a). Chaque case est reliée à ses voisins des quatre points cardinaux quand elles existent. Cela détermine un graphe non orienté (e) auquel on associe un graphe orienté (f) en dédoublant chaque arête. D'après le théorème d'Euler, un tel graphe possède des circuits eulériens. Nous allons utiliser un rotor-router pour en découvrir un.

Posons un rotor dans chaque case. La case A est par exemple munie d'un rotor à deux positions,

puisque'elle est reliée à deux autres cases (B et C). Orientons les rotors en prenant la première direction disponible à partir de la position nord en tournant dans le sens horaire. Les six rotors et leurs directions initiales sont dessinés en (a). On pose un agent dans la case E, et on le laisse faire selon la règle de fonctionnement des rotor-routers : l'agent fait tourner le rotor de la case dans lequel il se trouve, et suit la direction qu'il indique alors, et recommence dans la nouvelle case. Le parcours de l'agent suit le chemin indiqué en (b) : EFECDFDCE.

Il revient donc dans la case E sans être passé partout. C'est la phase d'ini-

tialisation. Les rotors ont changé de direction et sont maintenant dans les orientations indiquées par le dessin (c). L'agent reprend son cheminement et, cette fois en 14 étapes, revient en E après avoir parcouru un chemin eulérien. À l'issue de ce parcours, il a remis tous les rotors comme ils l'étaient en (c) : il reprendra donc indéfiniment le chemin eulérien découvert (représenté en (d) et en (g)).

Ce qui se produit ici est général. Quel que soit le graphe non orienté initial, un agent sans mémoire, grâce au système des rotors, finit toujours par découvrir un circuit eulérien du graphe orienté associé, qu'il parcourt alors indéfiniment. Cette méthode permet à un amnésique de sortir d'un labyrinthe quelle que soit sa complexité, pourvu qu'il dispose d'une craie pour dessiner l'équivalent des rotors à chaque carrefour.

plus classique de diffusion centrale nommé IDLA (*Internal Diffusion-Limited Aggregation*, ou agrégation interne limitée par la diffusion) introduit en 1992. Les chemins aléatoires peuvent être conçus de plusieurs façons, mais la plus simple consiste pour chaque pas fait par l'agent à lancer un dé à quatre faces et, selon le résultat, à faire se déplacer l'agent d'une case vers le nord, le sud, l'est ou l'ouest.

James Propp présente le rotor-router comme une « dérandomisation » du modèle classique de diffusion centrale, c'est-à-dire comme un modèle aussi proche que possible du modèle IDLA, mais ne dépendant plus du hasard. Bien que déterministe, le modèle du rotor-router a de nombreuses propriétés communes avec le modèle aléatoire, et sous une forme plus nette. Par exemple, dans le modèle aléatoire IDLA, on observe temporairement des trous dans la forme circulaire construite par les agents arrêtés. Ce n'est jamais le cas avec le rotor-router. Autre exemple : la frontière de l'ensemble des cases occupées, dont on démontre aussi qu'elle devient de plus en plus ronde dans le modèle aléatoire, est bien plus lisse avec le rotor-router.

Patrouilles sur un graphe

Le mécanisme du rotor-router a une capacité étonnante à parcourir efficacement un graphe quelconque. On se donne un graphe G non orienté (on ne précise aucun sens de parcours pour les arêtes) à nombre fini de nœuds et d'arêtes. Chaque nœud est muni d'un rotor. On suppose que le graphe est connexe : quels que soient les nœuds A et B du graphe, il existe un chemin allant de A à B. En un nœud quelconque, on pose un agent unique qui se met à suivre les indications des rotors sans jamais s'arrêter, en les faisant tourner à chaque fois qu'il passe. Ce qui se produit est là encore tout à fait remarquable.

Quels que soient le graphe, la position initiale des rotors et l'endroit d'où part l'agent, il visitera chaque nœud une infinité de fois sans en oublier aucun. Pour le démontrer, on note qu'il existe nécessairement un nœud N du graphe qui est