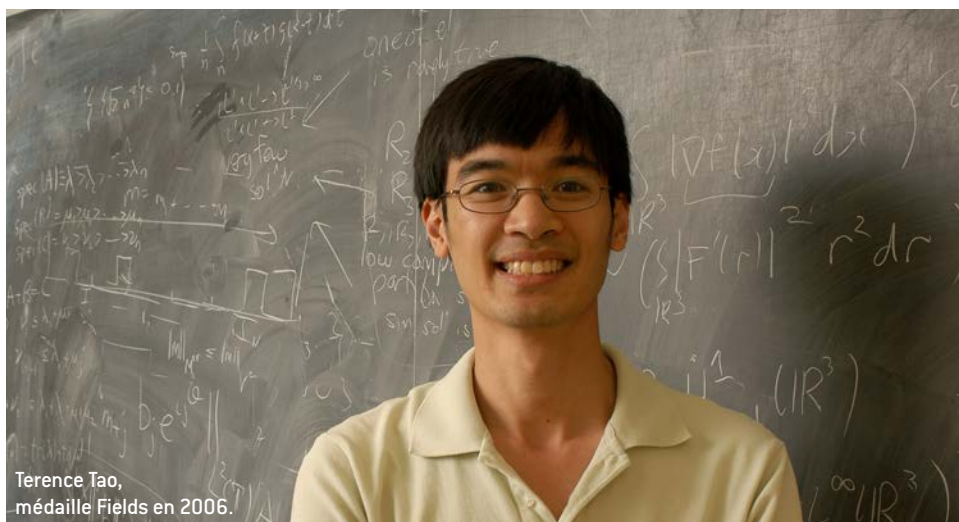


Actualités

Mathématiques

La conjecture de la discrédance de Paul Erdős est désormais prouvée

Cette conjecture résistait depuis plus de quatre-vingts ans. En s'appuyant sur les résultats d'un travail collaboratif et sur des découvertes récentes, l'Australien Terence Tao l'a confirmée.



En 1985, Terence Tao, jeune prodige des mathématiques âgé de 10 ans, rencontrait pour la première fois le célèbre mathématicien hongrois Paul Erdős, 72 ans. Ce dernier ne s'était pas trompé sur les qualités du garçon. Trente ans plus tard, Terence Tao, lauréat de la médaille Fields en 2006, a résolu l'une des conjectures énoncées par Erdős, la conjecture de la discrédance.

Le mathématicien et vulgarisateur James Grime illustre la conjecture ainsi : imaginez-vous sur une crête, avec un ravin à deux pas sur votre gauche et un autre à deux pas sur votre droite. Quels enchaînements de pas font que vous ne tombez pas dans un ravin ? Vous pouvez par exemple faire un pas à gauche, un à droite, un autre à gauche, encore un à droite, etc. Ou aussi un pas à droite, deux à gauche, un à droite, un à gauche, deux à droite, etc. Maintenant, pouvez-vous trouver un enchaînement de

pas à gauche et à droite dont tous les sous-enchaînements – définis en prenant un pas sur deux, un pas sur trois, un pas sur quatre, etc. – vous évitent de tomber dans le ravin ? On voit bien que si l'on prend un pas sur deux du premier enchaînement précédent, on tombe très vite dans le ravin. En fait, on peut montrer qu'il est possible de construire un enchaînement de 11 pas sans qu'aucun des sous-enchaînements vous condamne à la chute. Mais avec 12 pas, la chute est inévitable. Et si les ravins sont plus éloignés, de quelle longueur sont les enchaînements de pas que l'on peut construire en respectant la règle énoncée ci-dessus ?

En langage mathématique, si l'on remplace les pas à gauche et à droite par 1 et -1, la question revient à construire une suite dont la valeur absolue de la somme des premiers termes soit toujours inférieure à un entier K fixé. Considérons maintenant des sous-suites

en prenant des termes régulièrement espacés à partir de 0. On a d'abord la sous-suite des termes de rang pair, puis la sous-suite des termes de rang multiple de 3, puis multiple de 4, etc. Pour chacune de ces sous-suites, la valeur absolue de la somme des premiers termes peut-elle rester inférieure à K ? La conjecture d'Erdős énonce que c'est impossible pour K supérieur ou égal à 2. Pour toute suite, il existe toujours un nombre n et une sous-suite telle que la valeur absolue de la somme des n premiers termes excède K . L'énoncé de cette conjecture, dite de la discrédance, est relativement simple ; pourtant, les mathématiciens s'évertuent à la démontrer depuis quatre-vingts ans.

La situation $K = 2$ est illustrée plus haut par James Grime, avec les ravins situés à deux pas de chaque côté ; on a vu qu'on ne pouvait pas faire plus de 11 pas. Et pour $K = 3$? Boris Konev et Alexei Lisitsa, de l'université de

Liverpool, en Grande-Bretagne, ont trouvé la solution en 2014. Grâce à un programme informatique, ils ont testé toutes les configurations possibles pour des enchaînements de plus en plus longs. La preuve occupe un volume de 13 gigaoctets, ce qui en fait la plus longue démonstration jamais proposée. Le résultat est qu'il est possible de construire des enchaînements de 1 160 pas et d'échapper à la chute, mais qu'il n'est pas possible de s'en sortir avec 1 161 pas.

Plus K est grand, plus la contrainte sur les enchaînements se relâche, et plus il est possible de trouver une longue suite. Il est assez clair que chaque valeur de K peut être étudiée selon la technique de Boris Konev et Alexei Lisitsa, mais cela ne suffit pas pour démontrer le cas général qui fait l'objet de l'énigme d'Erdős : pour toute suite, il existera toujours une sous-suite qui vous fera tomber dans le ravin situé à une distance arbitraire de K pas.

En 2009, Timothy Gowers, de l'université de Cambridge, en Grande-Bretagne, et lauréat de la médaille Fields en 1998, a intégré la conjecture de la discrédance d'Erdős au projet *Polymath*. Ce projet collaboratif rassemble de nombreux mathématiciens, dont Terence Tao, qui s'attaquent à certains problèmes bien définis.

En 2012, l'équipe a concédé qu'elle ne faisait plus de progrès. Néanmoins, un résultat important a émergé lors de cette collaboration mondiale qui a duré trois ans. Il a été montré qu'il suffisait de vérifier le cas d'un type particulier de suites de 1 et de -1 pour démontrer la conjecture de

Géologie

Il y a de l'or partout !

Saviez-vous que nous avons partout de l'or sous les pieds ? Le problème est que les roches n'en renferment qu'un milligramme par tonne en moyenne. Sauf dans les gisements, où le métal est jusqu'à mille fois plus concentré. Une équipe dirigée par Gleb Pokrovski, directeur de recherche CNRS au laboratoire Géosciences environnement Toulouse, a reconstitué leur formation et déduit qu'ils sont bien plus fréquents qu'on ne le croyait !

façon générale : celles où le terme de rang $(n + m)$ est égal au produit des termes de rang n et de rang m , où n et m sont sans diviseurs communs. Ces suites sont intéressantes, car il existe des relations entre la suite principale et toutes les sous-suites. Ainsi, si la suite principale vous empêche de tomber dans le ravin (de dépasser le nombre K), il existe toute une liste de sous-suites qui vous empêchent de tomber dans le ravin.

Ces suites « multiplicatives » sont fréquentes en théorie des nombres. Elles apparaissent par exemple dans la fonction de Liouville qui est reliée aux nombres premiers. Elles ont été intensivement étudiées, mais certaines propriétés fondamentales restaient à éclaircir. En janvier 2015, un pas important a été franchi. Kaisa Matomäki, de l'université de Turku, en Finlande, et Maksym Radziwiłł, de l'université Rutgers, aux États-Unis, ont prouvé l'existence de relations surprenantes entre des moyennes à petite et grande échelle dans une suite multiplicative. Terence Tao a compris que ce résultat pouvait servir à prouver la conjecture d'Erdős, et l'a utilisé pour ce faire.

Ce résultat est extraordinaire à plus d'un titre. Il met en lumière le rôle des travaux collaboratifs tels que le projet *Polymath* dans de nombreux problèmes mathématiques. Il souligne aussi la performance d'un individu qui a pu trouver une démonstration générale alors que les ordinateurs, même les plus puissants, ne pouvaient vérifier que des cas particuliers.

Sean Baillly

T. Tao, soumis à *Discrete Analysis*, en ligne sur *arXiv*, 25 septembre 2015
<http://arxiv.org/abs/1509.05363>

Où se trouvent les gisements d'or connus ?

Gleb Pokrovski : Un peu partout dans le monde, mais surtout dans les montagnes. Les gisements se forment en effet grâce à des fluides hydrothermaux, qui extraient l'or des roches de la croûte terrestre et le transportent jusqu'à un lieu où il précipite. Or ces fluides ne circulent que dans les zones géologiques assez actives, en général là où les plaques tectoniques se rencontrent, formant des montagnes et des volcans.

Pourquoi considérerait-on la formation des gisements comme difficile ?

G. P. : L'or est un métal très inerte, qui se lie à peu d'espèces chimiques. De ce fait, il est difficile à extraire des roches. On ne connaissait que quelques éléments des fluides hydrothermaux capables de le dissoudre, tel l'ion chlorure Cl^- , et encore en faible quantité. Il fallait alors évoquer des hypothèses improbables pour expliquer les gisements : un volume de fluides hydrothermaux équivalent à celui des océans ou la présence de magmas ou de roches préconcentrés en or dans les profondeurs terrestres. Nous avons montré qu'un autre composé des fluides hydrothermaux, l'ion trisulfure S_3^- , est capable de transporter beaucoup

plus d'or, ce qui rend ces hypothèses superflues.

Pourquoi cet ion était-il passé inaperçu jusqu'à présent ?

G. P. : Car dans les fluides hydrothermaux trouvés en surface, il se transforme en d'autres composés, en raison des plus faibles pressions et températures. Nous n'avons découvert sa présence dans les fluides profonds qu'en 2010, en reproduisant les conditions thermodynamiques des profonds



Gleb Pokrovski, directeur de recherche au CNRS.

deurs (plusieurs centaines d'atmosphères et de degrés celsius) dans des récipients de quelques dixièmes de millimètre de diamètre.

Et comment avez-vous montré que cet ion se lie à l'or ?

G. P. : Grâce à la spectroscopie par rayons X, nous avons d'abord montré que des ions trisulfure entourent l'or dans des fluides modèles comprimés et chauffés. Nous avons ensuite simulé sur ordinateur les mouvements et les interactions d'une centaine de molécules dans les fluides hydrothermaux.

Ces simulations ont confirmé que l'or se lie à l'ion trisulfure. Enfin, nous avons montré, par des mesures de solubilité et des calculs thermodynamiques, qu'un fluide hydrothermal riche en S_3^- est capable de dissoudre assez d'or pour former un gisement.

Vos travaux permettent-ils de localiser les gisements d'or ?

G. P. : Pas encore, car la formation de gisements dépend de nombreux autres paramètres : la roche doit être assez perméable pour que les fluides hydrothermaux s'y écoulent, l'or doit pouvoir précipiter, etc. On ne sait donc pas dire où exactement ces conditions se produisent. Mais la bonne nouvelle est que les gisements sont bien plus fréquents qu'on ne le pensait. Avec le processus que nous avons découvert, nul besoin d'invoquer des conditions ultraparticulières pour leur formation. Les ions trisulfure devraient dissoudre l'or un peu partout, même si les gisements qui affleurent sont concentrés dans les montagnes. On estimait auparavant que les gisements exploitables ne contenaient qu'un millionième de tout l'or de la croûte terrestre. Une estimation à revoir à la hausse.

Guillaume Jacquemont

G. S. Pokrovski et al., *PNAS*, en ligne le 12 octobre 2015