

de n cases de côté et à essayer d'y placer n reines. C'est le « problème des n reines ». On découvre sans mal que pour $n=2$ et $n=3$, c'est impossible. En revanche, pour $n \geq 4$, cela semble toujours possible.

On envisage deux aspects du problème :
(i) trouver pour tout n une solution, s'il en existe ;

(ii) trouver toutes les solutions ou seulement les dénombrer, au moins pour les premières valeurs de n .

Une solution, oui ; toutes les solutions, non

Le problème (i) est aujourd'hui parfaitement résolu, cela sans avoir besoin d'un ordinateur : on décrit un procédé général sous forme géométrique qui, pour tout $n \geq 4$, construit une configuration convenable. De tels procédés sont nombreux et on en découvre régulièrement de nouveaux.

La version (ii) est bien plus délicate. Imaginer des procédés simples qui, pour tout entier n , décrivent toutes les solutions ne semble pas envisageable. On utilise donc des ordinateurs pour effectuer des calculs systématiques. C'est un exercice de programmation que tout étudiant en informatique a pratiqué au moins une fois. Il est assez facile d'écrire un programme qui traite le problème jusqu'à $n=12$. Aller au-delà demande plus de soin et de patience et fait l'objet de records qui, à cause de l'explosion combinatoire, évoluent lentement. À ce jour, le décompte des solutions a été mené jusqu'à $n=26$. Réussir ce décompte pour $n=27$ apparaît un défi difficile : on en est à $n=26$ depuis plus de cinq ans.

À défaut de connaître le nombre exact de solutions pour tout n , on essaie de minorer ce nombre, car il est intéressant de savoir (et de démontrer) que le nombre de solutions augmente très rapidement avec n . Quelques minoration sont connues et les raisonnements qui y mènent sont assez intéressants. Nous allons en présenter un et expliquer comment plusieurs mathématiciens ont été piégés et ont proposé de faux raisonnements repris parfois sans vérification dans la littérature sur le sujet. Auparavant, présentons la méthode pour obtenir

Une solution pour tout entier $n \geq 4$

Pour montrer que le problème des n reines a au moins une solution pour tout entier $n \geq 4$, il n'y a pas besoin d'ordinateur : il suffit de réfléchir. En plaçant des reines selon deux lignes obliques, on obtient un schéma qui marche parfaitement pour les nombres pairs n de la forme $6m+4$ (échiquier 1, $n=10$), où m est un entier positif ou nul, et de la forme $6m$ (échiquier 2, $n=12$), mais pas quand n est de la forme $6m+2$ (échiquier 3, $n=8$).

Il faut traiter à part le cas où n est de la forme $6m+2$. C'est assez facile : on part de deux lignes obliques de reines (échiquier 4), puis on déplace 4 reines (échiquier 5).

Lorsque n est impair, la solution se déduit des solutions trouvées pour le cas où n est pair : on reprend les solutions pour les cas pairs en ajoutant une reine en haut à droite sur l'échiquier agrandi d'une ligne et d'une colonne (échiquiers 6 et 7).

