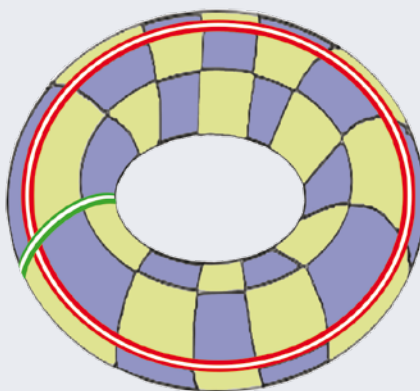
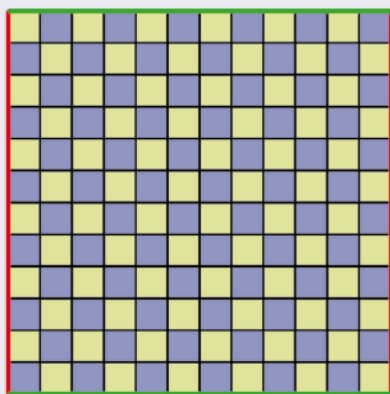
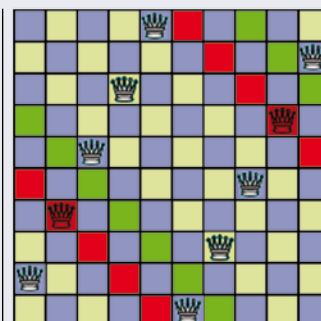


Le problème torique et ses prolongements plans

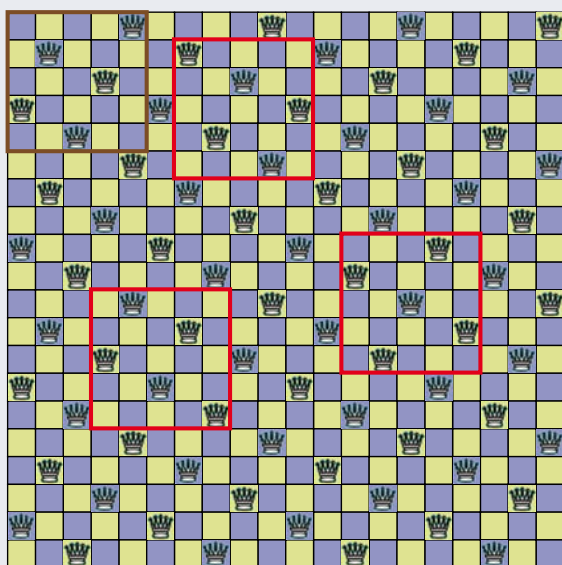


A. Partant d'un échiquier de côté n en caoutchouc, on colle le bord droit avec le bord gauche (*en rouge*). On obtient un échiquier cylindrique. On colle alors les deux extrémités du cylindre (*bords verts*), ce qui donne un tore. Les diagonales du carré initial se sont rejointes et il y en a maintenant n dans chaque sens, chacune ayant n cases.

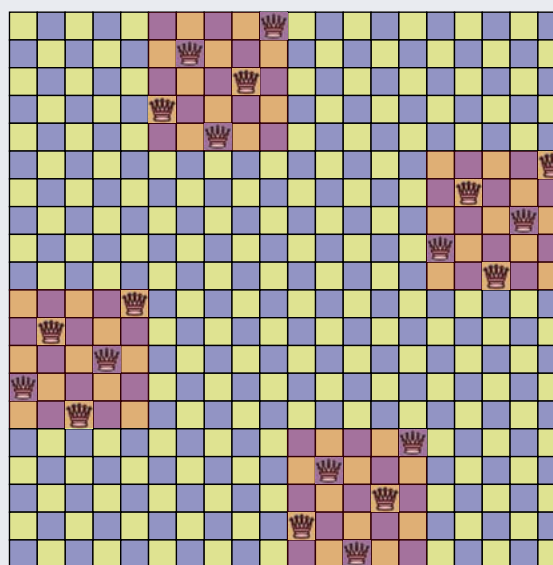


C. Cette solution au problème plan des 12 reines n'en est pas une pour le problème torique : la diagonale rouge contient deux reines (ici, la diagonale verte n'en contient aucune).

B. La diagonale rouge de cet échiquier torique contient deux reines. Cette solution au problème plan des 4 reines n'est donc pas une solution pour le problème torique.



D. Pour $n=5$, le problème torique a 10 solutions (l'une d'elles est représentée, avec un cadre marron). Une solution du problème torique des n reines permet d'en obtenir beaucoup d'autres : en pavant le plan par des carrés solutions du problème torique des n reines et en extrayant un carré $n \times n$ n'importe où dans le plan ainsi pavé, on obtient une autre solution du problème torique (cadres rouges).



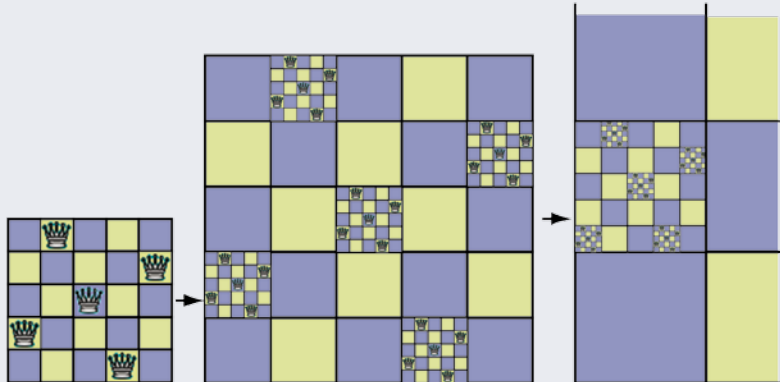
E. La « composition » d'une solution plane des 4 reines avec une solution torique des 5 reines fournit une solution au problème plan des 20 reines. En « composant » ainsi les solutions du problème torique des n reines avec des solutions du problème plan des m reines, on obtient un grand nombre de solutions au problème plan des $n \times m$ reines.

Une infinité de solutions infinies

La méthode de composition des solutions donne aussi la démonstration qu'il existe des solutions au « problème infini des reines ». Ce problème consiste à placer des reines sur un échiquier infini de sorte qu'il y ait une par ligne, une par colonne, une par diagonale parallèle à la droite $y = x$, et une par diagonale parallèle à la droite $y = -x$.

On procède progressivement : du problème torique des 5 reines, on prend la solution ayant une reine en son centre. On remplace chaque reine par la configuration elle-même (et l'on subdivise les autres cases). Cela donne une configuration convenable sur l'échiquier 25×25 . De plus, cette configuration prolonge la première, en ce sens qu'on peut la voir comme l'addition de 20 nouvelles reines aux 5 reines initiales. On répète la même opération, ce qui prolonge la solution qu'on a sur un échiquier 25×25 en une solution sur l'échiquier 125×125 , puis sur un échiquier 625×625 , etc. À chaque fois, les nouvelles configurations sont compatibles avec les précédentes, ce qui autorise à « passer à l'infini », c'est-à-dire à considérer simultanément toutes les reines qui sont déposées d'étape en étape. On a la solution recherchée.

La méthode donne ici une seule solution au problème infini des reines, mais on l'adapte pour montrer qu'il existe une infinité de solutions différentes à ce problème, que cette infinité de solutions n'est pas dénombrable et qu'elle est de même cardinal que le continu : il y a autant de solutions au problème infini des reines que de points sur une droite !



calcul. Ce dernier a tout de même duré dix mois et s'est terminé le 11 juillet 2009. Il a abouti à 22 317 699 616 364 044 (22 millions de milliards) solutions au problème des 26 reines. Depuis, le résultat a été confirmé par un calcul effectué par des Russes, mais le dénombrement des solutions n'a pas été effectué pour 27 reines ou plus.

Notons que si l'on cherche non pas une ou toutes les solutions, mais seulement quelques solutions, par exemple une centaine, alors d'autres méthodes de programmation sont envisageables. L'une d'elles consiste à placer au hasard une reine par colonne, ce qui donne une configuration très probablement incorrecte. On corrige

ensuite celle-ci en déplaçant les reines une à une, de telle sorte qu'à chaque déplacement, le nombre de conflits (c'est-à-dire de couples de reines en prise) diminue. On sait, par ce type d'algorithmes, trouver rapidement des solutions pour $n = 100$ ou même $n = 1\,000$. Un algorithme quantique a aussi été présenté qui permettra peut-être de battre le record de $n = 26$... le jour où l'on disposera d'ordinateurs quantiques de taille respectable, ce qui n'est pas le cas aujourd'hui.

Ceux que la programmation du problème intéresse trouveront une multitude de programmes traitant des n reines, écrits dans une grande variété de langages de

programmation, sur le site internet http://rosettacode.org/wiki/N-queens_problem.

À défaut de calculer le nombre exact de solutions pour tout n , on aimerait prouver que ce nombre augmente rapidement avec n (cela semble évident au vu des résultats connus de décompte jusqu'à $n = 26$). Nous décrivons une telle méthode, mais nous envisagerons d'abord une variante du problème des n reines introduite par le mathématicien d'origine hongroise George Pólya (1887-1985).

Pólya imagine un échiquier $n \times n$ dessiné sur un tore (la surface d'une chambre à air) (voir l'encadré page 81, A) et cherche des solutions au problème des n reines sur cet échiquier torique. Les contraintes sur les lignes et les colonnes ne changent pas. En revanche, pour les diagonales, cela se complique, car les diagonales se rejoignent désormais, comme si le bord droit était collé au bord gauche et le bord du haut au bord du bas (selon un principe souvent utilisé dans les jeux vidéo). Par conséquent, une configuration résolvant le problème des n reines sur l'échiquier normal n'est plus nécessairement une solution sur l'échiquier torique (voir les échiquiers B et C).

Des reines sur un échiquier torique

Pólya a établi qu'il ne pouvait exister de solutions à ce problème que si n est de la forme $6m + 1$ ou $6m - 1$ pour un certain entier m . Le nombre de solutions est donné par une suite $T(n)$ dont les premiers termes non nuls sont : $T(5) = 10$, $T(7) = 28$, $T(11) = 88$, $T(13) = 4\,524$, $T(17) = 140\,692$.

Propriété intéressante : si l'on dispose d'une solution torique et qu'on en pave tout le plan en utilisant le pavage habituel du plan par un carré, on obtient un dessin dont tout carré extrait de taille $n \times n$ est encore une solution torique du problème des n reines (voir l'échiquier D).

L'intérêt des solutions toriques est surtout qu'on peut les exploiter pour construire automatiquement une multitude de grandes solutions à partir de quelques petites. La méthode est visuelle : on prend une solution du problème plan des n reines (par problème plan, nous entendons le