

Mathématiques



Vue d'artiste de l'espace-temps courbe en relativité générale.

Solutions des équations d'Einstein : une conjecture démontrée

Une conjecture portant sur les conditions d'obtention de solutions des équations d'Einstein dépourvues de singularités vient d'être démontrée. Une avancée importante dans la compréhension mathématique de la relativité générale.

Nous fêtons en 2015 le centenaire de la relativité générale. Cette théorie développée par Albert Einstein décrit la gravitation comme une conséquence de la déformation de l'espace-temps par la matière. Les équations sont complexes et difficiles à résoudre, notamment à cause de leur nature non linéaire. De nombreux aspects sont encore mal compris et restent intensivement étudiés par les mathématiciens et les physiciens. Les équations d'Einstein présentent une grande richesse même dans le vide, en l'absence de matière.

Lorsque les chercheurs étudient une certaine situation, ils veulent avant tout obtenir des solutions qui ont un sens physique et qui ne doivent donc pas présenter de singularité, c'est-à-dire qui ne doivent pas tendre vers l'infini en un point donné. Comment garantir cette propriété ? En 1999, Sergiu Klainerman, de l'université de Princeton, avait conjecturé l'existence d'une condition assurant qu'une solution des équations d'Einstein dans le vide ne présente pas

de singularité. Cette condition repose sur une quantité d'origine géométrique dont on peut vérifier facilement si elle est infinie, ce qui impliquerait la présence d'une singularité dans l'espace-temps. Avec Igor Rodnianski, de l'université de Princeton, et Jérémie Szeftel, du laboratoire Jacques-Louis Lions (CNRS et université Pierre-et-Marie-Curie), Sergiu Klainerman a récemment prouvé cette conjecture.

La recherche de solutions aux équations d'Einstein a pour cadre ce que les mathématiciens nomment un problème de Cauchy : quelles sont les solutions d'une équation aux dérivées partielles lorsque certaines conditions initiales sont données ? Dans le cas de l'équation classique des ondes, il suffit de définir des conditions initiales de position et de vitesse pour calculer une solution. Pour les équations d'Einstein dans le vide, le problème est beaucoup plus complexe, mais Sergiu Klainerman a proposé la conjecture suivante : les équations d'Einstein dans le vide admettent une solution si, à l'instant initial,

le tenseur de courbure est une fonction de carré intégrable.

Le tenseur de courbure est un objet mathématique qui mesure la courbure de l'espace-temps. Il peut, par exemple, décrire la façon dont deux géodésiques (la généralisation d'une ligne droite dans un espace courbe) initialement parallèles divergent. Le tenseur est une fonction des coordonnées d'espace-temps. La condition de Sergiu Klainerman consiste à « multiplier » le tenseur par lui-même et à l'intégrer sur l'espace-temps (plus précisément à intégrer le carré de la valeur absolue de la fonction). Si le résultat est fini, la fonction est dite de carré intégrable. Cette classe de fonctions, notée L^2 , donne son nom à la conjecture de Klainerman : la conjecture de courbure L^2 .

Après plus de dix ans d'efforts, Sergiu Klainerman, Igor Rodnianski et Jérémie Szeftel l'ont démontrée. La partie principale de la preuve – longue de près de 850 pages dans sa version complète – vient d'être publiée dans une revue de mathématiques, *Inventiones Mathematicae*.

Le théorème obtenu par ces trois auteurs montre que la norme L^2 (c'est-à-dire l'intégrale du carré) du tenseur de courbure est un objet fondamental qui contrôle la formation éventuelle de singularités. Ce résultat est important, car il apporte des éléments clés pour traquer des solutions pathologiques des équations d'Einstein.

De telles singularités ne sont pas physiquement acceptables, mais sont mathématiquement possibles. Le Britannique Roger Penrose avait énoncé une conjecture dite de censure cosmique selon laquelle les singularités (à l'exception de celle du Big Bang) sont toujours cachées (c'est-à-dire physiquement inaccessibles) derrière un horizon des événements, comme c'est le cas pour la singularité au centre d'un trou noir de Schwarzschild. Il n'existerait pas de processus conduisant à une singularité nue. Cette conjecture de censure cosmique reste cependant à prouver.

S. B.

S. Klainerman et al.,
Inventiones Mathematicae,
vol. 202(1), pp. 91-216, 2015

Archéologie

Le Pompéi salvadorien fouillé

L'équipe de Payson Sheets, de l'université du Colorado, fouille actuellement Joya de Cerén, le « joyau de Cerén ». Vers 660 de notre ère, les activités de ce village maya du centre-ouest du Salvador ont été figées lorsque le volcan de San Salvador l'a brusquement recouvert d'une épaisse couche de cendres humides. La préservation des traces de vie quotidienne est si bonne que les chercheurs retrouvent des empreintes de doigt sur des bols ou de pied dans les jardins, que l'on reconnaît aux « ombres » laissées par les épis de maïs dans les murs de cendre. Ils ont ainsi mis au jour des toits de chaume, des couvertures, des jarres de haricots, des haches de jade, etc. La salle de l'un des bâtiments communautaires excavés était équipée de deux larges bancs, où les anciens du village se réunissaient peut-être afin d'y décider de la date de la récolte, de celles des fêtes et des libations rituelles, etc. Toutefois, l'intérêt essentiel des résultats de la fouille est sociologique : de nombreux indices dessinent en filigrane les relations entre les familles paysannes, les anciens, les artisans, le shaman et les autres membres spécialisés de cette communauté paysanne.

F. S.

Latin American Antiquity, vol. 26(3), pp. 341-361, 2015



Dans cette partie de Cerén, on distingue au premier plan une grange, au fond le sauna communautaire, sur la gauche l'habitation d'une famille et sur la droite la cendre qui a enseveli le village.

Astrophysique

Une éruption solaire en 774

En 2012, une équipe de l'université de Nagoya a mesuré, dans des échantillons de cèdres japonais, un pic de concentration en carbone 14 (produit par le rayonnement cosmique) correspondant à l'année 774-775. L'origine de ce pic restait incertaine, mais une nouvelle analyse par Raimond Muscheler, de l'université de Lund, et ses collègues indique qu'il résulte d'une éruption solaire, la plus importante jamais enregistrée. Les chercheurs ont relié la composition isotopique des cèdres à celle de carottes de glace au Groenland et en Antarctique datant de la même époque. Ils en ont déduit qu'en 774 a eu lieu une éruption solaire cinq fois plus intense que toutes celles mesurées jusqu'à présent. Ces résultats permettent de réévaluer l'amplitude potentielle de ces événements. Si une telle éruption se produisait aujourd'hui, elle perturberait fortement le réseau de satellites, les systèmes de communications et de distribution d'électricité.

S. B.

F. Makhaldi et al., *Nature Communications*, en ligne, 26 octobre 2015

Perception

Surdité liée au bruit : le rôle clé de la pejkavine

L'une des causes les plus fréquentes de la perte d'audition est l'exposition au bruit. Mais l'impact de ce facteur environnemental dépend de façon cruciale d'un gène codant une protéine nommée pejkavine. C'est ce qui ressort des travaux d'un groupe de chercheurs dirigé par Christine Petit, de l'institut Pasteur à Paris, et Paul Avan, de l'université d'Auvergne.

En 2006, ces chercheurs avaient établi la responsabilité de ce gène dans une forme de surdité précoce touchant notamment certaines familles en Iran. Les individus portant des mutations de ce gène présentent des atteintes auditives variées. Et chez des souris dont le gène de la pejkavine a été inactivé, les chercheurs ont constaté que les atteintes auditives variaient beaucoup d'un animal à l'autre.

En conséquence, ils se sont intéressés à l'environnement sonore des souris, lesquels émettent des cris intenses au cours de leurs trois premières semaines de vie. Les chercheurs ont constaté que le niveau sonore à partir duquel ces animaux entendent augmentait avec le nombre de souris dans la cage. Autrement dit, les souris entendaient d'autant plus mal que leur environnement était bruyant.

Restait à déterminer le rôle de la pejkavine. L'examen des cellules auditives (les cellules sensorielles

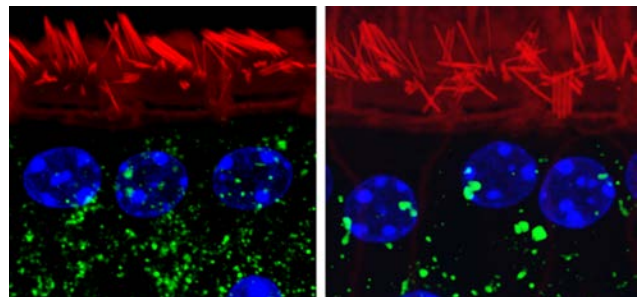
et les neurones auxquels elles sont connectées) des souris a montré qu'en l'absence de pejkavine, ces cellules se détériorent lorsque les animaux sont exposés à des sons même modérés (l'équivalent d'une minute de discothèque, chez l'homme). Et si l'exposition sonore se prolonge ou se répète, ces cellules meurent.

Pourquoi ? Christine Petit et ses collègues ont découvert que chez des souris normales, une exposition sonore conduit à une prolifération, au sein des cellules auditives, des peroxysomes – des organites qui, notamment, dégradent des composés toxiques de l'oxygène. En d'autres termes, il y a multiplication adaptative des peroxysomes en réaction au stress oxydatif dû à l'exposition au son. En l'absence de pejkavine, en revanche, cette réaction adaptative ne se produit pas ; les espèces réactives de l'oxygène se maintiennent à un taux très élevé, ce qui entraîne la mort des cellules.

Ces découvertes auront sans doute des conséquences sur le traitement de certaines surdités. On compense généralement les pertes auditives à l'aide d'appareils (prothèses auditives) qui amplifient les sons. Chez les personnes porteuses d'une mutation de ce gène, l'appareillage auditif risque d'être plus délétère que bénéfique...

Maurice Mashaal

S. Delmaghani et al., *Cell*, vol. 163(4), pp. 894-906, 2015



Après une exposition sonore, les peroxysomes (en vert) prolifèrent dans les cellules auditives des souris normales (à gauche), mais dégénèrent chez les rongeurs dépourvus de pejkavine (à droite).