

## LOGIQUE & CALCUL

### Paver avec des tatamis

*Les tapis japonais ont des proportions bien définies. De combien de façons peuvent-ils recouvrir une pièce rectangulaire ? Grâce à une contrainte géométrique traditionnelle, la question devient intéressante.*

Jean-Paul DELAHAYE

**A**u Japon, on recouvre traditionnellement le sol des habitations de tapis de paille de riz soigneusement serrés : les tatamis. Ils sont le plus souvent de dimension  $91 \times 182$  cm ou  $88 \times 176$  cm (à Tokyo). Dans toutes les régions, ils forment des rectangles aux proportions  $1 \times 2$ , auxquels on ajoute parfois des tatamis carrés  $1 \times 1$ . Le tatami est utilisé comme unité d'aire ; sa largeur détermine souvent la taille des pièces d'une maison ainsi que celles des portes et des fenêtres. Lorsqu'on dispose les tatamis, on s'arrange pour qu'en aucun point ne se rencontrent quatre tatamis (voir l'encadré page ci-contre). La raison – esthétique ou pratique ? – n'est pas bien claire, mais cette tradition semble respectée partout au Japon.

La contrainte « Jamais quatre tatamis en un même point » intéresse les mathématiciens. Elle a suscité, depuis une dizaine d'années, d'étonnantes recherches, dont celles d'Alexandro Erickson, qui a soutenu en 2013 une thèse sur le sujet à l'université de Victoria, au Canada. Il se trouve en effet que la règle imposée limite fortement les combinaisons possibles, sans toutefois imposer un nombre trop restreint de dispositions dont on trouverait facilement une caractérisation. Le mathématicien aime ce genre de situations !

Dans un premier temps, nous n'envisagerons que les pavages sans carrés. Par définition, le pavage d'une forme géométrique par des rectangles  $1 \times 2$  respectant

la contrainte des tatamis sera un « pavage tatami-parfait ». Lorsque l'utilisation de tatamis  $1 \times 1$  sera autorisée, nous parlerons de « pavages à tatamis ».

#### Pavages tatami-parfaits

L'encadré ci-contre donne un décompte du nombre de pavages tatami-parfaits pour les rectangles les plus petits et fournit pour certains rectangles les listes de pavages différents. On remarquera que même lorsque l'aire d'un rectangle est paire, il peut n'exister aucun pavage tatami-parfait. Le plus petit rectangle pour lequel cette situation d'impossibilité se produit est le rectangle  $7 \times 10$ .

Ce tableau provient d'un travail de Dean Hickerson réalisé en 2002 et complété par Frank Ruskey et Jennifer Woodcock en 2009. Les chercheurs sont parvenus au résultat suivant. Notons  $T(m, n)$  le nombre de pavages tatami-parfaits du rectangle  $m \times n$  correspondant au tableau ; quatre cas sont à distinguer.

(a)  $T(1, n)$  vaut 1 si  $n$  est pair, et 0 si  $n$  est impair (ce qui est évident).

(b)  $T(2, n)$  est égal au nombre de façons d'écrire l'entier  $n$  comme une somme de 1 et de 2 sans qu'il y ait deux 2 consécutifs. Exemple : l'entier 5 s'écrit  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 2 + 1 + 2$ , il y a donc 6 pavages tatami-parfaits pour le rectangle  $2 \times 5$ .

(c) Si  $m$  est impair et supérieur à 1,  $T(m, n)$  est le double du nombre de façons

d'écrire  $n$  comme une somme de  $m - 1$  et de  $m + 1$ . Ainsi,  $T(5, 10) = 4$ , car  $10 = 4 + 6 = 6 + 4$ . Le fait qu'il n'existe pas de pavages tatami-parfaits pour  $7 \times 10$  se comprend maintenant aisément : 10 ne peut pas s'écrire comme somme de nombres égaux à 6 ou à 8.

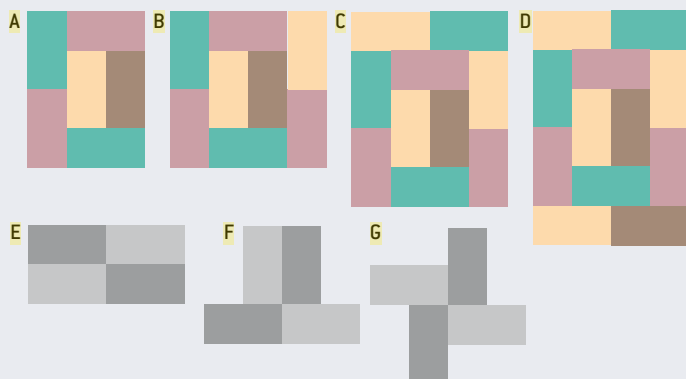
(d) Si  $m$  est pair et supérieur à 2,  $T(m, n)$  est le nombre de façons d'écrire  $n$  comme somme de nombres pris parmi 1,  $m - 2$  et  $m$  en s'arrangeant pour qu'un terme sur deux soit un 1. Par exemple,  $T(6, 12) = 4$  car  $12 = 1 + 4 + 1 + 6 = 1 + 6 + 1 + 4 = 4 + 1 + 6 + 1 = 6 + 1 + 4 + 1$ .

L'encadré page 80 décrit la structure générale des pavages tatami-parfaits de rectangles et illustre pourquoi le nombre de solutions au problème du pavage est lié aux dénombrements arithmétiques indiqués ci-dessus.

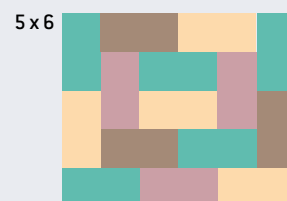
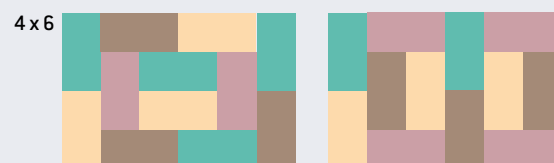
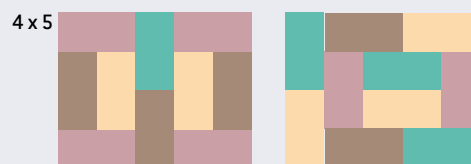
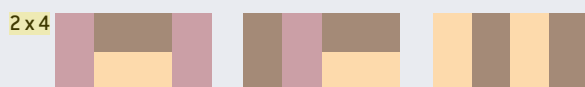
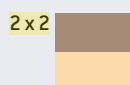
Ces conclusions sont fondées sur des résultats intermédiaires soigneusement démontrés. Toutefois, en manipulant des dominos à la recherche de solutions et en s'aidant de l'encadré page 80, on se persuade de l'exactitude des résultats mentionnés sans qu'il faille lire la dizaine de pages de la démonstration complète. Parmi les résultats généraux intéressants sur les pavages tatami-parfaits, il y a celui indiquant que connaître la disposition des tatamis sur le pourtour du rectangle qu'on cherche à paver détermine entièrement le pavage intérieur s'il est possible.

Dans le domaine de la combinatoire, il est souvent impossible de donner une expression simple (comme  $2n$ ,  $n(n+1)(n+2)/3$ , ou  $5n+n!$ ) pour les suites rencontrées. Cependant,

## Pavages tatami-parfaits avec des dominos



|    | 1 | 2   | 3  | 4  | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13  | 14  | 15  | 16  |
|----|---|-----|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| 1  | 0 | 1   | 0  | 1  | 0 | 1 | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0   | 1   | 0   | 1   |
| 2  | 1 | 2   | 3  | 4  | 6 | 9 | 13 | 19 | 28 | 41 | 60 | 88 | 129 | 189 | 277 | 406 |
| 3  | 0 | 3   | 0  | 4  | 0 | 6 | 0  | 10 | 0  | 16 | 0  | 26 | 0   | 42  | 0   | 68  |
| 4  | 1 | 4   | 4  | 2  | 3 | 3 | 3  | 5  | 5  | 6  | 8  | 8  | 11  | 13  | 14  | 19  |
| 5  | 0 | 6   | 0  | 3  | 0 | 2 | 0  | 2  | 0  | 4  | 0  | 4  | 0   | 6   | 0   | 8   |
| 6  | 1 | 9   | 6  | 3  | 2 | 2 | 2  | 1  | 1  | 2  | 3  | 4  | 3   | 3   | 3   | 4   |
| 7  | 0 | 13  | 0  | 3  | 0 | 2 | 0  | 2  | 0  | 0  | 0  | 2  | 0   | 4   | 0   | 2   |
| 8  | 1 | 19  | 10 | 5  | 2 | 1 | 2  | 2  | 2  | 1  | 0  | 0  | 1   | 2   | 3   | 4   |
| 9  | 0 | 28  | 0  | 5  | 0 | 1 | 0  | 2  | 0  | 2  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0   | 2   |
| 10 | 1 | 41  | 16 | 6  | 4 | 2 | 0  | 1  | 2  | 2  | 2  | 1  | 0   | 0   | 0   | 0   |
| 11 | 0 | 60  | 0  | 8  | 0 | 3 | 0  | 0  | 0  | 2  | 0  | 2  | 0   | 0   | 0   | 0   |
| 12 | 1 | 88  | 26 | 8  | 4 | 4 | 2  | 0  | 0  | 1  | 2  | 2  | 2   | 1   | 0   | 0   |
| 13 | 0 | 129 | 0  | 11 | 0 | 3 | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 2  | 0   | 2   | 0   | 0   |
| 14 | 1 | 189 | 42 | 13 | 6 | 3 | 4  | 2  | 0  | 0  | 0  | 1  | 2   | 2   | 2   | 1   |
| 15 | 0 | 277 | 0  | 14 | 0 | 3 | 0  | 3  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 2   | 0   | 2   |
| 16 | 1 | 406 | 68 | 19 | 8 | 4 | 2  | 4  | 2  | 0  | 0  | 0  | 0   | 1   | 2   | 2   |



**R**ecouvrir un rectangle  $m \times n$  par des dominos  $1 \times 2$  sans que quatre dominos ne se rencontrent en un point, telle est la contrainte des tatamis parfaits. Ce problème de géométrie combinatoire intéresse les mathématiciens depuis quelques années.

Pour un rectangle  $m \times n$ , quand la contrainte est acceptée, la configuration obtenue est un «pavage tatami-parfait»: les configurations A, B, C, D sont permises, les configurations E, F, G sont interdites. De tels pavages ne sont pas toujours possibles.

Quand  $m$  et  $n$  sont tous les deux impairs, leur produit est impair; il n'existe alors pas de pavages tatami-parfaits du rectangle  $m \times n$ , l'aire d'un domino étant paire. Cependant, ce n'est pas le seul cas d'impossibilité: par exemple, les rectangles  $10 \times 7$ ,  $8 \times 11$  ou

$14 \times 10$  n'admettent aucun pavage tatami-parfait.

Le tableau en haut à droite donne le nombre de solutions en fonction de  $m$  et  $n$ , où l'on compte toutes les solutions, dont celles qui se déduisent d'autres par symétrie ou rotation. Ce tableau est l'une des conséquences de résultats démontrés par Dean Hickerson en 2002.

Avec le tableau vous disposez d'une belle série de puzzles amusants. Après avoir découpé suffisamment de rectangles  $1 \times 2$

ou réuni quelques jeux de dominos, choisissez une valeur du tableau, par exemple celle indiquant qu'il existe six pavages tatami-parfaits pour le rectangle  $2 \times 6$ , et recherchez-les tous.

Les dessins du bas montrent des solutions pour les plus simples des puzzles:  $2 \times 2$ ,  $2 \times 4$ ,  $3 \times 4$ ,  $4 \times 4$ ,  $4 \times 5$ ,  $4 \times 6$  et  $5 \times 6$  (nous n'avons pas représenté les solutions qui se déduisent d'autres par symétrie ou rotation).