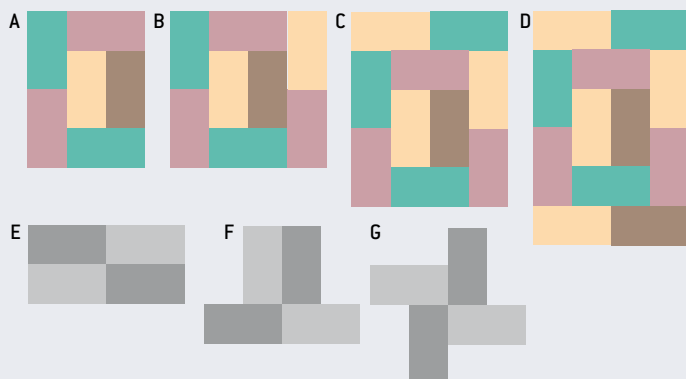
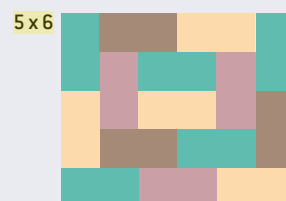
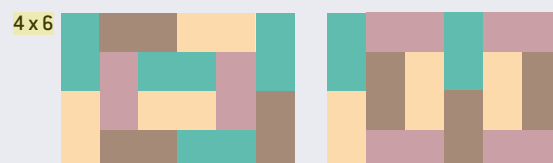
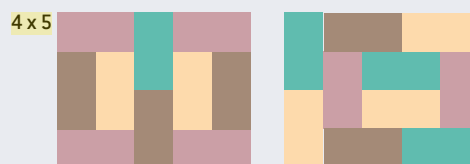
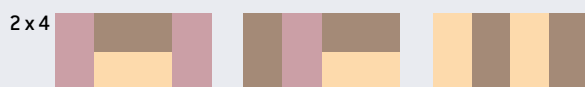


Pavages tatami-parfaits avec des dominos



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277	406
3	0	3	0	4	0	6	0	10	0	16	0	26	0	42	0	68
4	1	4	4	2	3	3	3	5	5	6	8	8	11	13	14	19
5	0	6	0	3	0	2	0	2	0	4	0	4	0	6	0	8
6	1	9	6	3	2	2	2	1	1	2	3	4	3	3	3	4
7	0	13	0	3	0	2	0	2	0	0	0	2	0	4	0	2
8	1	19	10	5	2	1	2	2	2	1	0	0	1	2	3	4
9	0	28	0	5	0	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	2
10	1	41	16	6	4	2	0	1	2	2	2	1	0	0	0	0
11	0	60	0	8	0	3	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0
12	1	88	26	8	4	4	2	0	0	1	2	2	2	1	0	0
13	0	129	0	11	0	3	0	1	0	0	0	2	0	2	0	0
14	1	189	42	13	6	3	4	2	0	0	0	1	2	2	2	1
15	0	277	0	14	0	3	0	3	0	0	0	0	0	2	0	2
16	1	406	68	19	8	4	2	4	2	0	0	0	0	1	2	2



Recouvrir un rectangle $m \times n$ par des dominos 1×2 sans que quatre dominos ne se rencontrent en un point, telle est la contrainte des tatamis parfaits. Ce problème de géométrie combinatoire intéresse les mathématiciens depuis quelques années.

Pour un rectangle $m \times n$, quand la contrainte est acceptée, la configuration obtenue est un «pavage tatami-parfait»: les configurations A, B, C, D sont permises, les configurations E, F, G sont interdites. De tels pavages ne sont pas toujours possibles.

Quand m et n sont tous les deux impairs, leur produit est impair; il n'existe alors pas de pavages tatami-parfaits du rectangle $m \times n$, l'aire d'un domino étant paire. Cependant, ce n'est pas le seul cas d'impossibilité: par exemple, les rectangles 10×7 , 8×11 ou

14×10 n'admettent aucun pavage tatami-parfait.

Le tableau en haut à droite donne le nombre de solutions en fonction de m et n , où l'on compte toutes les solutions, dont celles qui se déduisent d'autres par symétrie ou rotation. Ce tableau est l'une des conséquences de résultats démontrés par Dean Hickerson en 2002.

Avec le tableau vous disposez d'une belle série de puzzles amusants. Après avoir découpé suffisamment de rectangles 1×2

ou réuni quelques jeux de dominos, choisissez une valeur du tableau, par exemple celle indiquant qu'il existe six pavages tatami-parfaits pour le rectangle 2×6 , et recherchez-les tous.

Les dessins du bas montrent des solutions pour les plus simples des puzzles: 2×2 , 2×4 , 3×4 , 4×4 , 4×5 , 4×6 et 5×6 (nous n'avons pas représenté les solutions qui se déduisent d'autres par symétrie ou rotation).

Dénombrement des pavages tatami-parfaits

Par pavage, nous entendrons ici pavage tatami-parfait.

Hauteur 1. Il n'existe de pavages tatami-parfaits pour le rectangle $1 \times m$ que si m est pair, et un seul pour chaque m .

Hauteur 2. Il existe deux composants de base, B et C. Tous les pavages du rectangle $2 \times m$ s'obtiennent en accolant des copies de ces deux composants sans jamais mettre deux C côte à côte. Par exemple, le rectangle 2×14 est obtenu par l'accolement C, B, B, C, B, C, B, B, B, B. Ainsi, le nombre de façons de paver le rectangle $2 \times m$ est le nombre de façons d'écrire m comme une somme de nombres 1 et 2 sans deux 2 consécutifs.

Hauteur 3. On a quatre composants de base: D, D', E et E'. Deux lettres nues (D, E) ne peuvent être côte à côte, et *idem* pour deux lettres primées (D', E'). Les juxtapositions de lettres prises parmi D, D', E, E' respectant cette règle donnent un pavage tatami-parfait. Par exemple, pour le rectangle 3×22 , la juxtaposition E'D'E'D'D'E'D' est satisfaisante. Le nombre de façons de paver le rectangle $3 \times m$ est égal au double (car on peut commencer par une lettre nue ou primée) du nombre de façons d'écrire m comme somme composée de 2 et de 4.

Hauteur 4. Il y a maintenant trois composants de base: F, G et H. Une juxtaposition sera bonne si un composant sur deux est H (F et G ne peuvent être côte à côte). Ainsi, pour le rectangle 4×23 , la juxtaposition HGHGHFHGHFHGH convient. Le nombre de façons de paver le rectangle $4 \times m$ est le nombre de façons d'écrire m comme une somme de 1, de 2 et de 4 en mettant un 1 une fois sur deux dans la somme.

Hauteur 5. Analogue au cas « Hauteur 3 », de même que pour toute hauteur impaire $n = 2k + 1$. Il y a quatre composants de base, I, I', J et J', donnant des pavages pour les rectangles $n \times (n - 1)$ et $n \times (n + 1)$.

Hauteur 6. Analogue au cas « Hauteur 4 », de même que pour toute hauteur paire. Il y a trois composants de base, K, L et M, de taille $n \times (n - 2)$, $n \times n$ et $n \times 1$, et il faut alterner le M avec l'un des deux autres.

