

Dénombrement des pavages tatami-parfaits

Par pavage, nous entendons ici pavage tatami-parfait.

Hauteur 1. Il n'existe de pavages tatami-parfaits pour le rectangle $1 \times m$ que si m est pair, et un seul pour chaque m .

Hauteur 2. Il existe deux composants de base, B et C. Tous les pavages du rectangle $2 \times m$ s'obtiennent en accolant des copies de ces deux composants sans jamais mettre deux C côte à côte. Par exemple, le rectangle 2×14 est obtenu par l'accolement C, B, B, C, B, C, B, B, B, B, B. Ainsi, le nombre de façons de paver le rectangle $2 \times m$ est le nombre de façons d'écrire m comme une somme de nombres 1 et 2 sans deux 2 consécutifs.

Hauteur 3. On a quatre composants de base: D, D', E et E'. Deux lettres nues (D, E) ne peuvent être côte à côte, et *idem* pour deux lettres primées (D', E'). Les juxtapositions de lettres prises parmi D, D', E, E' respectant cette règle donnent un pavage tatami-parfait. Par exemple, pour le rectangle 3×22 , la juxtaposition E'D'E'D'D'E'D' est satisfaisante. Le nombre de façons de paver le rectangle $3 \times m$ est égal au double (car on peut commencer par une lettre nue ou primée) du nombre de façons d'écrire m comme somme composée de 2 et de 4.

Hauteur 4. Il y a maintenant trois composants de base: F, G et H. Une juxtaposition sera bonne si un composant sur deux est H (F et G ne peuvent être côte à côte). Ainsi, pour le rectangle 4×23 , la juxtaposition HGHGHFHGHFHGH convient. Le nombre de façons de paver le rectangle $4 \times m$ est le nombre de façons d'écrire m comme une somme de 1, de 2 et de 4 en mettant un 1 une fois sur deux dans la somme.

Hauteur 5. Analogue au cas « Hauteur 3 », de même que pour toute hauteur impaire $n = 2k + 1$. Il y a quatre composants de base, I, I', J et J', donnant des pavages pour les rectangles $n \times (n - 1)$ et $n \times (n + 1)$.

Hauteur 6. Analogue au cas « Hauteur 4 », de même que pour toute hauteur paire. Il y a trois composants de base, K, L et M, de taille $n \times (n - 2)$, $n \times n$ et $n \times 1$, et il faut alterner le M avec l'un des deux autres.

