

Dénombrement des pavages tatami-parfaits

Par pavage, nous entendons ici pavage tatami-parfait.

Hauteur 1. Il n'existe de pavages tatami-parfaits pour le rectangle $1 \times m$ que si m est pair, et un seul pour chaque m .

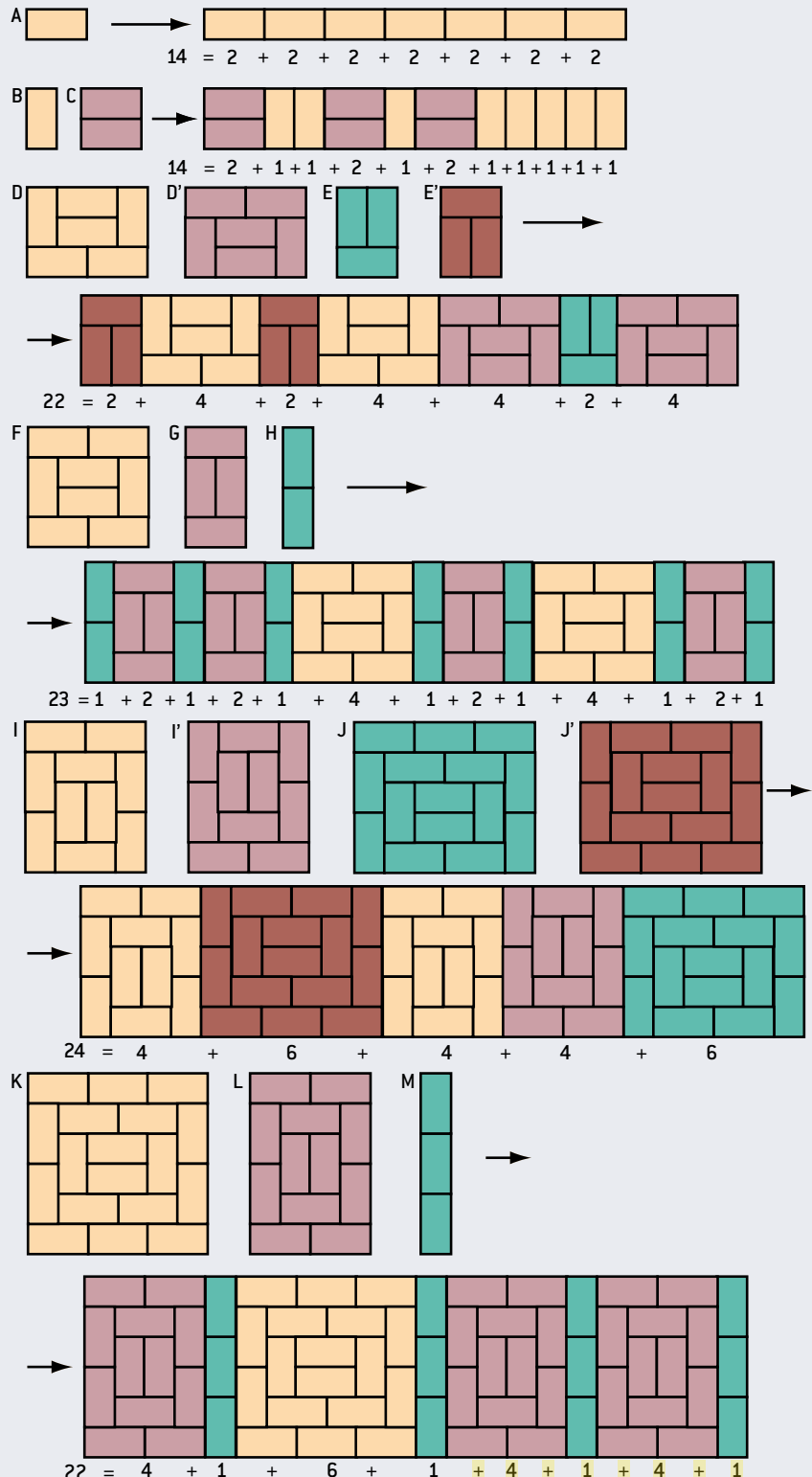
Hauteur 2. Il existe deux composants de base, B et C. Tous les pavages du rectangle $2 \times m$ s'obtiennent en accolant des copies de ces deux composants sans jamais mettre deux C côte à côte. Par exemple, le rectangle 2×14 est obtenu par l'accolement C, B, B, C, B, C, B, B, B, B, B. Ainsi, le nombre de façons de paver le rectangle $2 \times m$ est le nombre de façons d'écrire m comme une somme de nombres 1 et 2 sans deux 2 consécutifs.

Hauteur 3. On a quatre composants de base: D, D', E et E'. Deux lettres nues (D, E) ne peuvent être côte à côte, et *idem* pour deux lettres primées (D', E'). Les juxtapositions de lettres prises parmi D, D', E, E' respectant cette règle donnent un pavage tatami-parfait. Par exemple, pour le rectangle 3×22 , la juxtaposition E'D'E'D'D'E'D' est satisfaisante. Le nombre de façons de paver le rectangle $3 \times m$ est égal au double (car on peut commencer par une lettre nue ou primée) du nombre de façons d'écrire m comme somme composée de 2 et de 4.

Hauteur 4. Il y a maintenant trois composants de base: F, G et H. Une juxtaposition sera bonne si un composant sur deux est H (F et G ne peuvent être côte à côte). Ainsi, pour le rectangle 4×23 , la juxtaposition HGHGHFHGHFHGH convient. Le nombre de façons de paver le rectangle $4 \times m$ est le nombre de façons d'écrire m comme une somme de 1, de 2 et de 4 en mettant un 1 une fois sur deux dans la somme.

Hauteur 5. Analogue au cas « Hauteur 3 », de même que pour toute hauteur impaire $n = 2k + 1$. Il y a quatre composants de base, I, I', J et J', donnant des pavages pour les rectangles $n \times (n - 1)$ et $n \times (n + 1)$.

Hauteur 6. Analogue au cas « Hauteur 4 », de même que pour toute hauteur paire. Il y a trois composants de base, K, L et M, de taille $n \times (n - 2)$, $n \times n$ et $n \times 1$, et il faut alterner le M avec l'un des deux autres.



on réussit parfois à résumer toute l'information d'une suite compliquée de terme général a_n avec ce que l'on dénomme sa « fonction génératrice » $f(z)$, définie par :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Cette expression est une façon d'obtenir une formule très courte donnant la suite. En voici un exemple. Le nombre de façons de composer un mot de n lettres avec des x et des y est $a_n = 2^n$: il y a deux choix pour la première lettre, deux choix pour la seconde, etc. Soit f la fonction associée à cette suite a_n par la formule donnée ci-dessus. Comme chaque terme est égal à $2^n z^n$, on reconnaît une suite géométrique de raison $2z$; on a donc $f(z) = 1/(1 - 2z)$, cette égalité valant pour tout nombre z réel ou complexe vérifiant $|z| < 1/2$. La fonction $f(z) = 1/(1 - 2z)$ exprime ainsi indirectement les valeurs de $a_n = 2^n$: c'est la fonction génératrice de la suite 2^n .

Fonctions génératrices

La fonction génératrice de la suite donnée en exemple n'est guère plus simple que la suite elle-même et n'est pas très utile, mais, assez fréquemment, on ne dispose pas de formule élémentaire pour la suite alors que sa fonction génératrice est d'expression simple. C'est le cas pour le décompte du nombre de pavages tatami-parfaits. Le nombre de ces pavages pour les rectangles de hauteur 2 est le nombre $b_n = T(2, n)$ dont la construction ne correspond pas à une expression facile. En revanche, la fonction génératrice de la suite b_n est assez simple : $f(z) = (1 + z^2)/(1 - z - z^3)$. C'est aussi le cas de la fonction génératrice de la suite donnant le nombre de pavages tatami-parfaits de hauteur m . Frank Ruskey et Jennifer Woodcock ont ainsi établi en 2009 que :

$$f(z) = 1 \text{ si } m = 0,$$

$$f(z) = 1/(1 - z^2) \text{ si } m = 1,$$

$$f(z) = (1 + z^2)/(1 - z - z^3) \text{ si } m = 2,$$

$$f(z) = (1 + z^{m-1} + z^{m+1})/(1 - z^{m-1} - z^{m+1})$$

si m est impair et pour $n \geq m \geq 3$, et

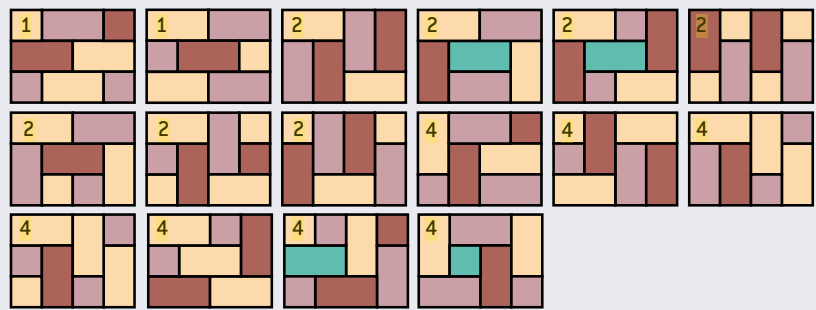
$$f(z) = (1 + z)(1 + z^{m-2} + z^m)/(1 - z^{m-1} - z^{m+1})$$

si m est pair et pour $n \geq m \geq 4$.

$T(m, n)$ est alors donné par le coefficient de z^n dans le développement de $f(z)$ en une somme de puissances de z . Ces formules sont au

Pavages avec des dominos et des carrés

Si, en plus des tatamis 1×2 , on autorise l'utilisation de tatamis carrés 1×1 (en imposant toujours la contrainte que quatre tapis ne doivent jamais se rencontrer en un même point), le nombre de façons de paver un rectangle augmente. Pour le rectangle 3×4 , il existe 44 pavages à tatamis possibles, qui se groupent en 16 classes représentées ci-dessous, le nombre de pavages d'une même classe (pavages se déduisant par symétrie ou rotation) étant indiqué en haut à gauche du représentant de chaque classe.



Les quatre noyaux et les contraintes induites

Tout rectangle à coordonnées entières se pave d'une façon au moins par des tatamis 1×2 et 1×1 sans que quatre tatamis se rencontrent en un même point. C'est évident en considérant les pavages « mur de briques » ; la méthode du mur de briques s'étend même à des figures non rectangulaires, comme indiqué ci-dessous. Il existe quatre « noyaux » A, B, C, D présents dans un pavage de rectangles par des tatamis 2×1 et 1×1 . Chacun d'eux engendre des contraintes sur les tatamis voisins qui se prolongent jusqu'aux côtés du rectangle.

