

on réussit parfois à résumer toute l'information d'une suite compliquée de terme général a_n avec ce que l'on dénomme sa « fonction génératrice » $f(z)$, définie par :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Cette expression est une façon d'obtenir une formule très courte donnant la suite. En voici un exemple. Le nombre de façons de composer un mot de n lettres avec des x et des y est $a_n = 2^n$: il y a deux choix pour la première lettre, deux choix pour la seconde, etc. Soit f la fonction associée à cette suite a_n par la formule donnée ci-dessus. Comme chaque terme est égal à $2^n z^n$, on reconnaît une suite géométrique de raison $2z$; on a donc $f(z) = 1/(1 - 2z)$, cette égalité valant pour tout nombre z réel ou complexe vérifiant $|z| < 1/2$. La fonction $f(z) = 1/(1 - 2z)$ exprime ainsi indirectement les valeurs de $a_n = 2^n$: c'est la fonction génératrice de la suite 2^n .

Fonctions génératrices

La fonction génératrice de la suite donnée en exemple n'est guère plus simple que la suite elle-même et n'est pas très utile, mais, assez fréquemment, on ne dispose pas de formule élémentaire pour la suite alors que sa fonction génératrice est d'expression simple. C'est le cas pour le décompte du nombre de pavages tatami-parfaits. Le nombre de ces pavages pour les rectangles de hauteur 2 est le nombre $b_n = T(2, n)$ dont la construction ne correspond pas à une expression facile. En revanche, la fonction génératrice de la suite b_n est assez simple : $f(z) = (1 + z^2)/(1 - z - z^3)$. C'est aussi le cas de la fonction génératrice de la suite donnant le nombre de pavages tatami-parfaits de hauteur m . Frank Ruskey et Jennifer Woodcock ont ainsi établi en 2009 que :

$$f(z) = 1 \text{ si } m = 0,$$

$$f(z) = 1/(1 - z^2) \text{ si } m = 1,$$

$$f(z) = (1 + z^2)/(1 - z - z^3) \text{ si } m = 2,$$

$$f(z) = (1 + z^{m-1} + z^{m+1})/(1 - z^{m-1} - z^{m+1})$$

si m est impair et pour $n \geq m \geq 3$, et

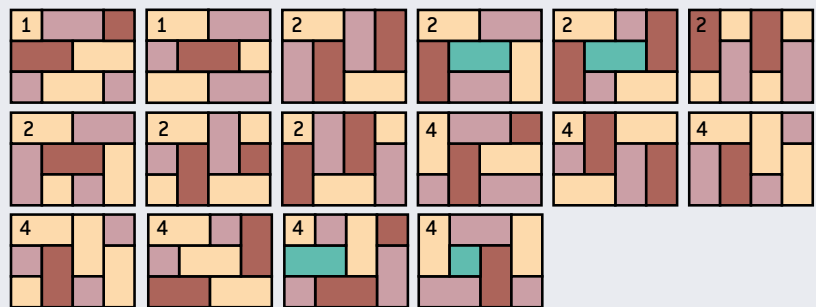
$$f(z) = (1 + z)(1 + z^{m-2} + z^m)/(1 - z^{m-1} - z^{m+1})$$

si m est pair et pour $n \geq m \geq 4$.

$T(m, n)$ est alors donné par le coefficient de z^n dans le développement de $f(z)$ en une somme de puissances de z . Ces formules sont au

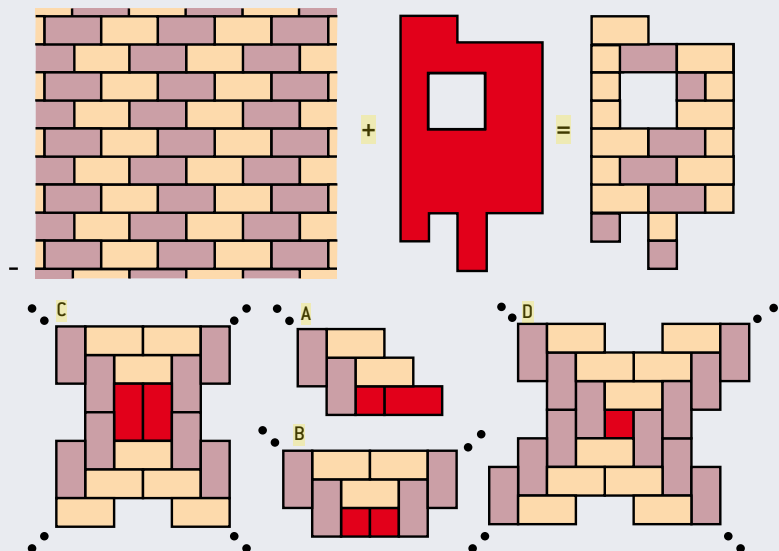
Pavages avec des dominos et des carrés

Si, en plus des tatamis 1×2 , on autorise l'utilisation de tatamis carrés 1×1 (en imposant toujours la contrainte que quatre tapis ne doivent jamais se rencontrer en un même point), le nombre de façons de paver un rectangle augmente. Pour le rectangle 3×4 , il existe 44 pavages à tatamis possibles, qui se groupent en 16 classes représentées ci-dessous, le nombre de pavages d'une même classe (pavages se déduisant par symétrie ou rotation) étant indiqué en haut à gauche du représentant de chaque classe.



Les quatre noyaux et les contraintes induites

Tout rectangle à coordonnées entières se pave d'une façon au moins par des tatamis 1×2 et 1×1 sans que quatre tatamis se rencontrent en un même point. C'est évident en considérant les pavages « mur de briques » ; la méthode du mur de briques s'étend même à des figures non rectangulaires, comme indiqué ci-dessous. Il existe quatre « noyaux » A, B, C, D présents dans un pavage de rectangles par des tatamis 2×1 et 1×1 . Chacun d'eux engendre des contraintes sur les tatamis voisins qui se prolongent jusqu'aux côtés du rectangle.



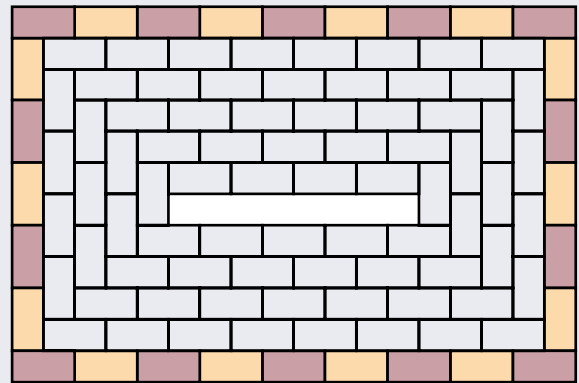
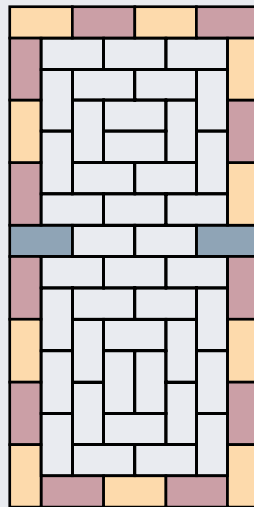
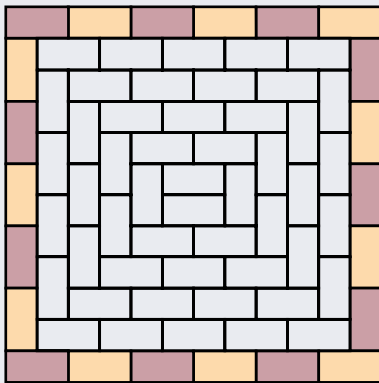
Le pourtour détermine l'intérieur

Un théorème de la théorie des pavages tatami-parfaits indique que la connaissance du pavage sur le pourtour d'un rectangle est suffisante pour retrouver toute la

disposition intérieure des tatamis, si elle est possible. Ci-dessous, les pourtours de trois rectangles sont représentés en couleurs. Deux d'entre eux se complètent et donnent

un pavage tatami-parfait du rectangle, alors que le troisième, à droite, conduit à une impossibilité. On s'en rend compte en plaçant une couronne intérieure (obligatoire pour respecter la

contrainte), puis une autre, puis une troisième, puis une quatrième. On se retrouve alors dans une configuration finale où il est impossible de poursuivre.



centre d'une anecdote mettant en scène Donald Knuth, le célèbre auteur de *The Art of Computer Programming*, traité de référence de l'algorithmique. Dans son ouvrage, Donald Knuth propose en exercice d'écrire un programme pour calculer les nombres $T(m, n)$ (il s'est intéressé avant tout le monde aux dispositions japonaises de tapis).

Avec la solution, il énonce une conjecture sur ces nombres et en propose une fonction génératrice. L'expression conjecturée n'est cependant pas correcte et comme Donald Knuth avait promis un dollar à toute personne qui lui indiquerait une erreur dans son traité, il dut signer un chèque de un dollar aux auteurs des formules ci-dessus, chèque qu'ils ont soigneusement photocopié et qu'ils exhibent fièrement à chaque fois qu'ils présentent un exposé sur les pavages tatami-parfaits.

Puisque les Japonais utilisent parfois des tatamis carrés, le problème général des

pavages par tatamis doit les prendre en compte (toujours avec la contrainte « Jamais quatre tatamis en un même point »).

Avec des tatamis carrés

On s'aperçoit vite que l'on ne peut utiliser qu'un nombre assez limité de tatamis carrés, et que trouver, compter et caractériser tous les pavages à tatamis n'est pas une tâche évidente, même en ne s'intéressant qu'aux pavages de rectangles. L'encadré page 81, en haut, indique les 16 classes donnant (par symétrie et rotation) les 44 solutions pour le rectangle 3×4 .

Cette fois, tous les rectangles admettent au moins un pavage, car la forme « mur de briques » convient parfaitement (voir l'encadré page 81, en bas). Quand on considère d'autres pavages à tatamis de rectangles, on remarque qu'il existe quatre dispositions de

base; nous les dénommerons « noyaux », qui engendrent de proche en proche des contraintes sur les autres tatamis jusqu'au bord du rectangle qu'on cherche à recouvrir. Ces noyaux ont été nommés « hamburger » (deux rectangles 1×2 collés par un grand côté), « cyclone » (un carré entouré de quatre rectangles 1×2), le V (deux carrés côte à côte), le I (un rectangle 1×2 collé sur un petit côté avec un carré). On montre sans mal que le V et le I sont nécessairement placés sur les bords du rectangle qu'on cherche à paver. Le hamburger peut être partout, horizontalement ou verticalement. Le cyclone admet deux variantes, selon le sens dans lequel il tourne, et peut se retrouver partout lui aussi. Tout pavage à tatamis d'un rectangle n'est en définitive que le résultat obligé de quelques noyaux qui contraignent les autres tatamis, ces contraintes s'étendant sur toute la surface du rectangle recouvert.