

Le pourtour détermine l'intérieur

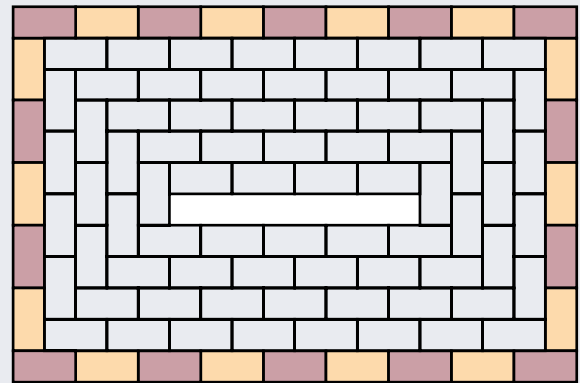
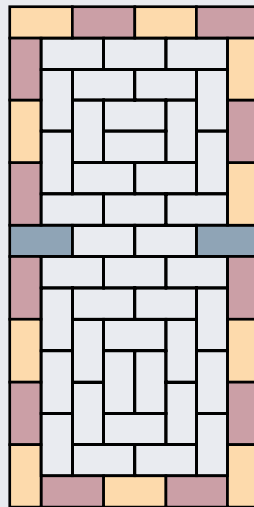
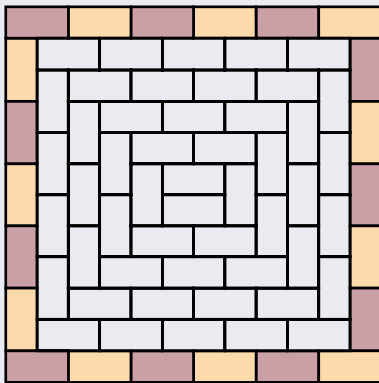
Un théorème de la théorie des pavages tatami-parfaits indique que la connaissance du pavage sur le pourtour d'un rectangle est suffisante pour retrouver toute la

disposition intérieure des tatamis, si elle est possible. Ci-dessous, les pourtours de trois rectangles sont représentés en couleurs. Deux d'entre eux se complètent et donnent

un pavage tatami-parfait du rectangle, alors que le troisième, à droite, conduit à une impossibilité. On s'en rend compte en plaçant une couronne intérieure (obligatoire pour respecter la

contrainte), puis une autre, puis une troisième, puis une quatrième.

On se retrouve alors dans une configuration finale où il est impossible de poursuivre.



centre d'une anecdote mettant en scène Donald Knuth, le célèbre auteur de *The Art of Computer Programming*, traité de référence de l'algorithmique. Dans son ouvrage, Donald Knuth propose en exercice d'écrire un programme pour calculer les nombres $T(m, n)$ (il s'est intéressé avant tout le monde aux dispositions japonaises de tapis).

Avec la solution, il énonce une conjecture sur ces nombres et en propose une fonction génératrice. L'expression conjecturée n'est cependant pas correcte et comme Donald Knuth avait promis un dollar à toute personne qui lui indiquerait une erreur dans son traité, il dut signer un chèque de un dollar aux auteurs des formules ci-dessus, chèque qu'ils ont soigneusement photocopié et qu'ils exhibent fièrement à chaque fois qu'ils présentent un exposé sur les pavages tatami-parfaits.

Puisque les Japonais utilisent parfois des tatamis carrés, le problème général des

pavages par tatamis doit les prendre en compte (toujours avec la contrainte « Jamais quatre tatamis en un même point »).

Avec des tatamis carrés

On s'aperçoit vite que l'on ne peut utiliser qu'un nombre assez limité de tatamis carrés, et que trouver, compter et caractériser tous les pavages à tatamis n'est pas une tâche évidente, même en ne s'intéressant qu'aux pavages de rectangles. L'encadré page 81, en haut, indique les 16 classes donnant (par symétrie et rotation) les 44 solutions pour le rectangle 3×4 .

Cette fois, tous les rectangles admettent au moins un pavage, car la forme « mur de briques » convient parfaitement (voir l'encadré page 81, en bas). Quand on considère d'autres pavages à tatamis de rectangles, on remarque qu'il existe quatre dispositions de

base; nous les dénommerons « noyaux », qui engendrent de proche en proche des contraintes sur les autres tatamis jusqu'au bord du rectangle qu'on cherche à recouvrir. Ces noyaux ont été nommés « hamburger » (deux rectangles 1×2 collés par un grand côté), « cyclone » (un carré entouré de quatre rectangles 1×2), le V (deux carrés côte à côte), le I (un rectangle 1×2 collé sur un petit côté avec un carré). On montre sans mal que le V et le I sont nécessairement placés sur les bords du rectangle qu'on cherche à paver. Le hamburger peut être partout, horizontalement ou verticalement. Le cyclone admet deux variantes, selon le sens dans lequel il tourne, et peut se retrouver partout lui aussi. Tout pavage à tatamis d'un rectangle n'est en définitive que le résultat obligé de quelques noyaux qui contraignent les autres tatamis, ces contraintes s'étendant sur toute la surface du rectangle recouvert.

On notera et on démontrera sans mal que, à part le carré au centre d'un cyclone, un tatami carré isolé ne peut être présent que sur un bord du rectangle pavé.

Toutefois, placer au hasard des noyaux dans un rectangle ne conduit pas toujours à un pavage à tatamis correct. En effet, chaque noyau engendre des diagonales contraintes qui, si elles se rencontrent, doivent être compatibles, ce qui est lié à la parité de leur écartement. Alejandro Erickson et les autres chercheurs déjà mentionnés ont tiré de toutes ces remarques une caractérisation précise des pavages à tatamis de rectangles. Elle est assez compliquée, mais permet de démontrer des résultats intéressants et précis. Notons $T(r, c, m)$ le nombre de pavages à tatamis d'un rectangle de hauteur r , de largeur c et comportant m tatamis carrés. Voici quelques propriétés aujourd'hui établies.

— Si $T(r, c, m)$ est strictement positif, alors m et le produit rc ont la même parité, et m est inférieur ou égal au maximum de $(r+1, c+1)$.

— Soient m et n deux entiers de même parité. Le nombre de pavages à tatamis du carré $n \times n$ comportant exactement m tatamis carrés est nul si $m > n$, égal à n^{2n} si $m = n$, et égal à $m^{2m} + (m+1)^{2m+1}$ si $m < n$.

— Les décomptes sont maintenant beaucoup plus compliqués, mais pour une hauteur donnée, il a été démontré que la fonction génératrice de la suite est un quotient de polynômes dont on sait calculer les coefficients.

Comme pour les pavages tatami-parfaits, si un rectangle possède un pavage de tatamis, alors il semble que la connaissance de ce pavage sur le pourtour du pavage le détermine complètement. Cependant, cette propriété n'est pour l'instant qu'une conjecture.

Aujourd'hui, résoudre les problèmes par *oui* ou *non*, mener des décomptes et obtenir des formules ou des séries génératrices n'est plus la seule préoccupation des mathématiciens : ils veulent aussi des algorithmes ou au moins savoir quels types d'algorithmes sont possibles ou impossibles.

Quand on se donne une forme quelconque composée de carrés collés par leurs côtés (ces formes sont dénommées « polygones orthogonaux ») et que l'on s'intéresse à leurs pavages par tatamis, la question naturelle

qui se pose est : est-il possible ou non de trouver par algorithme un pavage à tatamis ou un pavage tatami-parfait ? Dans le cas des rectangles, les résultats expliqués précédemment montrent que la réponse est calculable par algorithme et qu'on peut le faire rapidement (on peut répondre *oui* ou *non* en un temps majoré par un polynôme en k , où k est l'aire du rectangle mesurée en nombre de tatamis 1×1).

Et les polygones orthogonaux ?

Dans le cas des pavages simples par dominos (donc sans la contrainte « Pas de rencontre de quatre dominos en un point »), on connaît des algorithmes indiquant en temps polynomial si la forme peut être pavée, et d'ailleurs on connaît de tels algorithmes non seulement pour les rectangles, mais aussi pour les polygones orthogonaux quelconques.

Un deuxième cas facile est celui de savoir si un polygone orthogonal admet un pavage à tatamis (avec des rectangles 1×2 et 1×1). La réponse est toujours *oui* : on prend le pavage en mur de briques de tout le plan, et on y découpe le polygone orthogonal ; certains tatamis 1×2 sont coupés et créent des tatamis 1×1 , mais tout ce qu'il y a à l'intérieur du polygone orthogonal découpé est bien un pavage à tatamis convenable.

Un cas restait difficile, celui des pavages tatami-parfaits (uniquement des tatamis 1×2 , et respect de la règle « Jamais quatre tatamis en un même point »). L'analyse de la question dans le cas général des polygones orthogonaux a été difficile, mais Alejandro Erickson et Frank Ruskey ont démontré en 2013 que le problème est NP-complet. Cela signifie que si la conjecture $P \neq NP$ est vraie (ce que l'on considère comme très probable), alors il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir rapidement (en un temps polynomial) si un polygone orthogonal quelconque admet un pavage tatami-parfait. Cette propriété exprime que trouver des pavages tatami-parfaits demande en général une longue et difficile recherche. Puisque c'est devenu un théorème, on peut donc affirmer : les problèmes de tatamis sont des casse-tête... chinois !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

A. Erickson et F. Ruskey, **Generating tatami coverings efficiently**, prépublication arXiv:1403.4776, 2014.

A. Erickson et F. Ruskey, **Dominotatami covering is NP-complete**, dans *Combinatorial Algorithms* (Lecture Notes in Computer Science n° 8288), Springer, pp. 140-149, 2013.

A. Erickson, **Monomino-domino tatami coverings**, thèse, université de Victoria, 2013.

A. Erickson et F. Ruskey, **Enumerating maximal tatami mat coverings of square grids with vertical dominoes**, prépublication arXiv:1304.0070, 2013.

Références supplémentaires sur www.pourlascience.fr



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr