

On notera et on démontrera sans mal que, à part le carré au centre d'un cyclone, un tatami carré isolé ne peut être présent que sur un bord du rectangle pavé.

Toutefois, placer au hasard des noyaux dans un rectangle ne conduit pas toujours à un pavage à tatamis correct. En effet, chaque noyau engendre des diagonales contraintes qui, si elles se rencontrent, doivent être compatibles, ce qui est lié à la parité de leur écartement. Alejandro Erickson et les autres chercheurs déjà mentionnés ont tiré de toutes ces remarques une caractérisation précise des pavages à tatamis de rectangles. Elle est assez compliquée, mais permet de démontrer des résultats intéressants et précis. Notons $T(r, c, m)$ le nombre de pavages à tatamis d'un rectangle de hauteur r , de largeur c et comportant m tatamis carrés. Voici quelques propriétés aujourd'hui établies.

– Si $T(r, c, m)$ est strictement positif, alors m et le produit rc ont la même parité, et m est inférieur ou égal au maximum de $\{r+1, c+1\}$.

– Soient m et n deux entiers de même parité. Le nombre de pavages à tatamis du carré $n \times n$ comportant exactement m tatamis carrés est nul si $m > n$, égal à n^{2n} si $m = n$, et égal à $m^{2m} + (m+1)^{2m+1}$ si $m < n$.

– Les décomptes sont maintenant beaucoup plus compliqués, mais pour une hauteur donnée, il a été démontré que la fonction génératrice de la suite est un quotient de polynômes dont on sait calculer les coefficients.

Comme pour les pavages tatami-parfaits, si un rectangle possède un pavage de tatamis, alors il semble que la connaissance de ce pavage sur le pourtour du pavage le détermine complètement. Cependant, cette propriété n'est pour l'instant qu'une conjecture.

Aujourd'hui, résoudre les problèmes par *oui* ou *non*, mener des décomptes et obtenir des formules ou des séries génératrices n'est plus la seule préoccupation des mathématiciens : ils veulent aussi des algorithmes ou au moins savoir quels types d'algorithmes sont possibles ou impossibles.

Quand on se donne une forme quelconque composée de carrés collés par leurs côtés (ces formes sont dénommées « polygones orthogonaux ») et que l'on s'intéresse à leurs pavages par tatamis, la question naturelle

qui se pose est : est-il possible ou non de trouver par algorithme un pavage à tatamis ou un pavage tatami-parfait ? Dans le cas des rectangles, les résultats expliqués précédemment montrent que la réponse est calculable par algorithme et qu'on peut le faire rapidement (on peut répondre *oui* ou *non* en un temps majoré par un polynôme en k , où k est l'aire du rectangle mesurée en nombre de tatamis 1×1).

Et les polygones orthogonaux ?

Dans le cas des pavages simples par dominos (donc sans la contrainte « Pas de rencontre de quatre dominos en un point »), on connaît des algorithmes indiquant en temps polynomial si la forme peut être pavée, et d'ailleurs on connaît de tels algorithmes non seulement pour les rectangles, mais aussi pour les polygones orthogonaux quelconques.

Un deuxième cas facile est celui de savoir si un polygone orthogonal admet un pavage à tatamis (avec des rectangles 1×2 et 1×1). La réponse est toujours *oui* : on prend le pavage en mur de briques de tout le plan, et on y découpe le polygone orthogonal ; certains tatamis 1×2 sont coupés et créent des tatamis 1×1 , mais tout ce qu'il y a à l'intérieur du polygone orthogonal découpé est bien un pavage à tatamis convenable.

Un cas restait difficile, celui des pavages tatami-parfaits (uniquement des tatamis 1×2 , et respect de la règle « Jamais quatre tatamis en un même point »). L'analyse de la question dans le cas général des polygones orthogonaux a été difficile, mais Alejandro Erickson et Frank Ruskey ont démontré en 2013 que le problème est NP-complet. Cela signifie que si la conjecture $P \neq NP$ est vraie (ce que l'on considère comme très probable), alors il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir rapidement (en un temps polynomial) si un polygone orthogonal quelconque admet un pavage tatami-parfait. Cette propriété exprime que trouver des pavages tatami-parfaits demande en général une longue et difficile recherche. Puisque c'est devenu un théorème, on peut donc affirmer : les problèmes de tatamis sont des casse-tête... chinois !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

A. Erickson et F. Ruskey, **Generating tatami coverings efficiently**, prépublication arXiv:1403.4776, 2014.

A. Erickson et F. Ruskey, **Dominotatami covering is NP-complete**, dans *Combinatorial Algorithms* (Lecture Notes in Computer Science n° 8288), Springer, pp. 140-149, 2013.

A. Erickson, **Monomino-domino tatami coverings**, thèse, université de Victoria, 2013.

A. Erickson et F. Ruskey, **Enumerating maximal tatami mat coverings of square grids with vertical dominoes**, prépublication arXiv:1304.0070, 2013.

Références supplémentaires sur www.pourlascience.fr



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr