

On notera et on démontrera sans mal que, à part le carré au centre d'un cyclone, un tatami carré isolé ne peut être présent que sur un bord du rectangle pavé.

Toutefois, placer au hasard des noyaux dans un rectangle ne conduit pas toujours à un pavage à tatamis correct. En effet, chaque noyau engendre des diagonales contraintes qui, si elles se rencontrent, doivent être compatibles, ce qui est lié à la parité de leur écartement. Alejandro Erickson et les autres chercheurs déjà mentionnés ont tiré de toutes ces remarques une caractérisation précise des pavages à tatamis de rectangles. Elle est assez compliquée, mais permet de démontrer des résultats intéressants et précis. Notons $T(r, c, m)$ le nombre de pavages à tatamis d'un rectangle de hauteur r , de largeur c et comportant m tatamis carrés. Voici quelques propriétés aujourd'hui établies.

– Si $T(r, c, m)$ est strictement positif, alors m et le produit rc ont la même parité, et m est inférieur ou égal au maximum de $(r+1, c+1)$.

– Soient m et n deux entiers de même parité. Le nombre de pavages à tatamis du carré $n \times n$ comportant exactement m tatamis carrés est nul si $m > n$, égal à n^{2^n} si $m = n$, et égal à $m^{2m} + (m+1)^{2m+1}$ si $m < n$.

– Les décomptes sont maintenant beaucoup plus compliqués, mais pour une hauteur donnée, il a été démontré que la fonction génératrice de la suite est un quotient de polynômes dont on sait calculer les coefficients.

Comme pour les pavages tatami-parfaits, si un rectangle possède un pavage de tatamis, alors il semble que la connaissance de ce pavage sur le pourtour du pavage le détermine complètement. Cependant, cette propriété n'est pour l'instant qu'une conjecture.

Aujourd'hui, résoudre les problèmes par *oui* ou *non*, mener des décomptes et obtenir des formules ou des séries génératrices n'est plus la seule préoccupation des mathématiciens : ils veulent aussi des algorithmes ou au moins savoir quels types d'algorithmes sont possibles ou impossibles.

Quand on se donne une forme quelconque composée de carrés collés par leurs côtés (ces formes sont dénommées « polygones orthogonaux ») et que l'on s'intéresse à leurs pavages par tatamis, la question naturelle

qui se pose est : est-il possible ou non de trouver par algorithme un pavage à tatamis ou un pavage tatami-parfait ? Dans le cas des rectangles, les résultats expliqués précédemment montrent que la réponse est calculable par algorithme et qu'on peut le faire rapidement (on peut répondre *oui* ou *non* en un temps majoré par un polynôme en k , où k est l'aire du rectangle mesurée en nombre de tatamis 1×1).

Et les polygones orthogonaux ?

Dans le cas des pavages simples par dominos (donc sans la contrainte « Pas de rencontre de quatre dominos en un point »), on connaît des algorithmes indiquant en temps polynomial si la forme peut être pavée, et d'ailleurs on connaît de tels algorithmes non seulement pour les rectangles, mais aussi pour les polygones orthogonaux quelconques.

Un deuxième cas facile est celui de savoir si un polygone orthogonal admet un pavage à tatamis (avec des rectangles 1×2 et 1×1). La réponse est toujours *oui* : on prend le pavage en mur de briques de tout le plan, et on y découpe le polygone orthogonal ; certains tatamis 1×2 sont coupés et créent des tatamis 1×1 , mais tout ce qu'il y a à l'intérieur du polygone orthogonal découpé est bien un pavage à tatamis convenable.

Un cas restait difficile, celui des pavages tatami-parfaits (uniquement des tatamis 1×2 , et respect de la règle « Jamais quatre tatamis en un même point »). L'analyse de la question dans le cas général des polygones orthogonaux a été difficile, mais Alejandro Erickson et Frank Ruskey ont démontré en 2013 que le problème est NP-complet. Cela signifie que si la conjecture $P \neq NP$ est vraie (ce que l'on considère comme très probable), alors il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir rapidement (en un temps polynomial) si un polygone orthogonal quelconque admet un pavage tatami-parfait. Cette propriété exprime que trouver des pavages tatami-parfaits demande en général une longue et difficile recherche. Puisque c'est devenu un théorème, on peut donc affirmer : les problèmes de tatamis sont des casse-tête... chinois !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

A. Erickson et F. Ruskey, *Generating tatami coverings efficiently*, prépublication arXiv:1403.4776, 2014.

A. Erickson et F. Ruskey, *Domino tatami covering is NP-complete*, dans *Combinatorial Algorithms* (Lecture Notes in Computer Science n° 8288), Springer, pp. 140-149, 2013.

A. Erickson, *Monomino-domino tatami coverings*, thèse, université de Victoria, 2013.

A. Erickson et F. Ruskey, *Enumerating maximal tatami mat coverings of square grids with v vertical dominoes*, prépublication arXiv:1304.0070, 2013.

Références supplémentaires sur www.pourlascience.fr



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Hulk et la grenouille, champions de la métamorphose

Certains personnages de fiction sont capables de changer radicalement et rapidement de forme. La nature n'est pas en reste dans ce domaine !

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ. Illustration : Marc BOULAY

De nombreux héros et autres monstres imaginaires présentent l'extraordinaire capacité de changer de forme rapidement, de leur plein gré (comme chez les Barbapapas) ou à leur insu (Bruce Banner devient Hulk sous l'effet de la colère). D'Ovide (*Métamorphoses*, achevé vers l'an 10 de notre ère) à Franz Kafka (*La Métamorphose*, 1915), en passant par Robert Louis Stevenson (*L'Étrange cas du docteur Jekyll et de M. Hyde*, 1886), la transformation morphologique a toujours fasciné les auteurs.

La métamorphose est souvent synonyme de malédiction pour celui qui la subit. Au cœur de l'intrigue, elle est en général spectaculaire et irréaliste. Mais de nombreuses espèces animales subissent aussi des transformations impressionnantes. Quels processus biologiques se cachent derrière ces « effets spéciaux » de la nature ?

Le dieu Protée de la mythologie grecque, les princes des contes de fées transformés en grenouilles, les loups-garous et les vampires du folklore médiéval... : nombreux sont les êtres imaginaires qui changent de forme. Qu'ils soient victimes d'un sortilège, d'une malédiction ou au contraire qu'ils bénéficient d'un superpouvoir, ces personnages sont des *métamorphes* (du grec *meta*, qui veut dire « au-delà », et *morphe*, « la forme »). En sciences naturelles, le terme renvoie à la *métamorphose*, un changement rapide et draconien de forme au cours du développement.



BRUCE BANNER, ALIAS HULK, a été victime d'un accident dans un laboratoire de recherche. Il lutte pour maîtriser ses émotions, qui menacent de le métamorphoser en un géant vert, violent et incontrôlable.

C'est le cas des grenouilles, des insectes et de nombreux autres animaux parmi les mollusques, crustacés, cnidaires (coraux, méduses), échinodermes ou encore tuniciers (sortes de « sacs » marins). Tous ces « métamorphes », bien réels, se caractérisent par un développement discontinu en plusieurs phases très différentes, par exemple la phase larvaire qui dure plus ou moins longtemps avant le passage au stade adulte.

La métamorphose est un phénomène physiologiquement activé par la sécrétion d'hormones de croissance qui varient selon les groupes (ecdysone chez les insectes, hormone thyroïdienne chez les amphibiens...). Cette décharge hormonale dans l'organisme entraîne une cascade de changements : de nouveaux organes (ailes, pattes) apparaissent grâce à une prolifération cellulaire, certains se transforment (tel l'intestin spiralé des têtards qui se déroule lors de la métamorphose) tandis que d'autres organes (telle la queue du têtard) disparaissent définitivement par lyse (désintégration de la membrane cellulaire) ou apoptose (mort cellulaire programmée). Cette révolution morphologique à l'échelle de l'organisme s'accompagne souvent d'un changement important de taille, de masse et d'habitat : ainsi, le petit têtard, aquatique et essentiellement herbivore, se métamorphose en grenouille, adulte amphibie et carnivore.

Moins spectaculaire et radical que la métamorphose, le polymorphisme relève aussi de cette capacité biologique à changer de forme (la « plasticité phénotypique »).