

LOGIQUE & CALCUL

Le nombre π est partout !

L'ubiquité du nombre π ne cesse d'étonner. Récemment encore, il est apparu là où personne ne s'attendait à le trouver : dans un système simple de collisions, dans la conjecture de Syracuse, dans le jeu de la vie...

Jean-Paul DELAHAYE

L'ubiquité est « le fait d'être présent partout à la fois ou en plusieurs lieux en même temps. » De tous les nombres, π est celui qui jouit le plus spectaculairement de cette propriété : on le rencontre sans cesse en mathématiques et en physique. L'une des conséquences de cette ubiquité est qu'on découvre encore de nouvelles façons de calculer π . Il est devenu difficile de battre les formules qui évaluent très vite ce nombre, parce que les meilleures méthodes connues résultent de recherches approfondies, qu'elles sont d'une grande subtilité, et qu'elles sont d'une époustouflante efficacité.

Aujourd'hui, le record de calcul donne 13 300 milliards de décimales de π et se fonde sur plusieurs formules, telle celle-ci, due aux frères David et Gregory Chudnowsky :

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)! (k!)^3 (640320)^{3k+3/2}}$$

Bien que ne pouvant entrer en concurrence avec cette extraordinaire formule (en se limitant au terme $k=0$, on trouve $\pi = 3,1415926535897342\dots$, ce qui est correct jusqu'au 14^e chiffre), nous allons, pour le défi, la beauté ou même l'amusement et l'étonnement, présenter quelques-unes des étranges nouvelles méthodes de calcul de π .

Commençons par les méthodes utilisant des procédés physiques. La méthode de Monte-Carlo pour calculer π se fonde sur un principe très simple : la surface d'un disque

de rayon r est πr^2 . Elle permet d'obtenir expérimentalement quelques décimales de π . On fait tomber au hasard des grains de sable sur un carré de côté r ; si les grains le recouvrent uniformément, la proportion de grains tombés dans le quart de disque de rayon r donne une valeur approchée de $\pi/4$: la superficie du carré est r^2 , celle du quart de disque est $\pi r^2/4$, donc le rapport est $\pi/4$ (voir l'encadré ci-contre, a).

Si par exemple on lâche 1 000 grains de sable et qu'il y en a 780 qui tombent dans le quart de disque, cela donne l'approximation $\pi = 4 \times 780/1\,000 = 3,12$. En pratique, cette méthode souffre d'un grave défaut : elle suppose que l'on sache disposer des grains de sable uniformément sur le carré. Or en les lançant vers le centre, par exemple, les grains de sable auront une distribution plus dense vers le centre et plus épars sur les bords. Le calcul sera faussé !

Il existe cependant des méthodes statistiques permettant de corriger cette non-uniformité. L'une d'elles consiste à compter le nombre de grains en affectant à chaque grain P un coefficient inversement proportionnel au nombre de grains situés dans un petit cercle autour de P . Les grains situés dans une zone dense sont ainsi comptés moins, ce qui corrige la non-uniformité.

Vincent Dumoulin et Félix Thouin, de l'université de Montréal, ont utilisé une méthode de ce type en tirant sur une cible distante de 20 mètres avec un fusil. Les expérimentateurs ont ainsi créé 30 857 trous

dans la cible. Le calcul, avec correction de la non-uniformité, a donné $\pi = 3,131$, ce qui correspond à une erreur de 0,3 %.

La méthode des aiguilles de Buffon est un autre moyen de tirer de la physique des valeurs approchées de π . On lance n aiguilles de longueur L , sur un parquet dont la largeur des lattes est L ; on compte le nombre k d'aiguilles coupant les lignes parallèles de jonction entre lattes ; le quotient $2n/k$ est une valeur approchée de π . Cette méthode est très classique aussi nous n'y reviendrons pas. D'ailleurs, comme celle des coups de fusil, elle ne donnera jamais plus de quatre décimales exactes de π .

Le nombre de chocs avec deux billes et un mur

Plus intéressante et surprenante est la méthode physique proposée par Gregory Galperin, de l'université de l'Illinois. Elle n'utilise que des chocs entre billes qui suivent les lois de la physique classique et produisent les décimales de π les unes après les autres. Non seulement le dispositif imaginé donne π , mais il le donne écrit en base 10, et cela sans qu'aucun calculateur mécanique ou électronique ne soit mêlé à l'affaire.

Par rapport à celle de Buffon et du fusil, la méthode de Galperin a l'avantage que le hasard n'intervient pas et que le procédé déterministe de calcul de π donne donc, non pas une approximation de π , mais exactement les premiers chiffres de $\pi\dots$ pour

Calculer π par des moyens physiques insoupçonnés

En comptant les points ou grains de sable supposés uniformément étalés sur un quart de disque inscrit dans un carré (a), et en faisant le rapport entre le nombre obtenu et le nombre total de grains de sable dans le carré, on obtient une valeur approchée de $\pi/4$. Lorsque les points sont choisis par des méthodes numériques (en utilisant par exemple des générateurs de nombres pseudoaléatoires), on parle de méthode de Monte-Carlo.

Si la répartition des points n'est pas uniforme, la méthode ne marche plus : il faut opérer un ajustement statistique. Vincent Dumoulin et Félix Thouin, plutôt que des grains de sable, ont tiré au fusil sur une cible. Le résultat de ce calcul agressif de π est 3,131.

Une deuxième méthode (b) est la méthode du naturaliste Buffon. Si on lance une aiguille aléatoirement sur un tracé constitué de droites parallèles espacées de la longueur L d'une aiguille, la probabilité

de l'intersection d'une aiguille avec une droite est $2/\pi$: en lançant beaucoup d'aiguilles et en comptant la proportion d'intersections, on en tire une approximation de π . Afin de comprendre cela, supposons que, en moyenne, le nombre de points d'intersection d'une courbe quelconque avec les droites soit proportionnel à sa longueur. Pour un cercle de diamètre L , ce nombre est toujours égal à 2 ; alors le nombre de points d'intersection pour l'aiguille sera en moyenne $2L/\pi L = 2/\pi$.

Une troisième méthode exploite les chocs entre billes. Prenons une bille bleue et une bille rouge de même masse (c). La bille rouge est immobile. La bille bleue la frappe selon un choc élastique. La bille bleue s'immobilise et la bille rouge se trouve précipitée sur un mur où elle rebondit et repart vers la bille bleue. Après le choc, la bille rouge est à nouveau immobile et la bille bleue s'éloigne indéfiniment. Il y a eu 3 chocs : 3 est le premier chiffre de π (d).

Si les masses sont dans un rapport 100, au lieu de 3 chocs, il y en a 31 (e). Plus généralement, Gregory Galperin a prouvé que si le rapport des masses est 100^n , alors le nombre de chocs reste fini, et c'est l'entier correspondant aux $n+1$ premières décimales de π . Ainsi, pour $n = 5$, on aura 314159 chocs : ce sont les 6 premiers chiffres de π .

