

Calculer π par des moyens physiques insoupçonnés

En comptant les points ou grains de sable supposés uniformément étalés sur un quart de disque inscrit dans un carré (a), et en faisant le rapport entre le nombre obtenu et le nombre total de grains de sable dans le carré, on obtient une valeur approchée de $\pi/4$. Lorsque les points sont choisis par des méthodes numériques (en utilisant par exemple des générateurs de nombres pseudoaléatoires), on parle de méthode de Monte-Carlo.

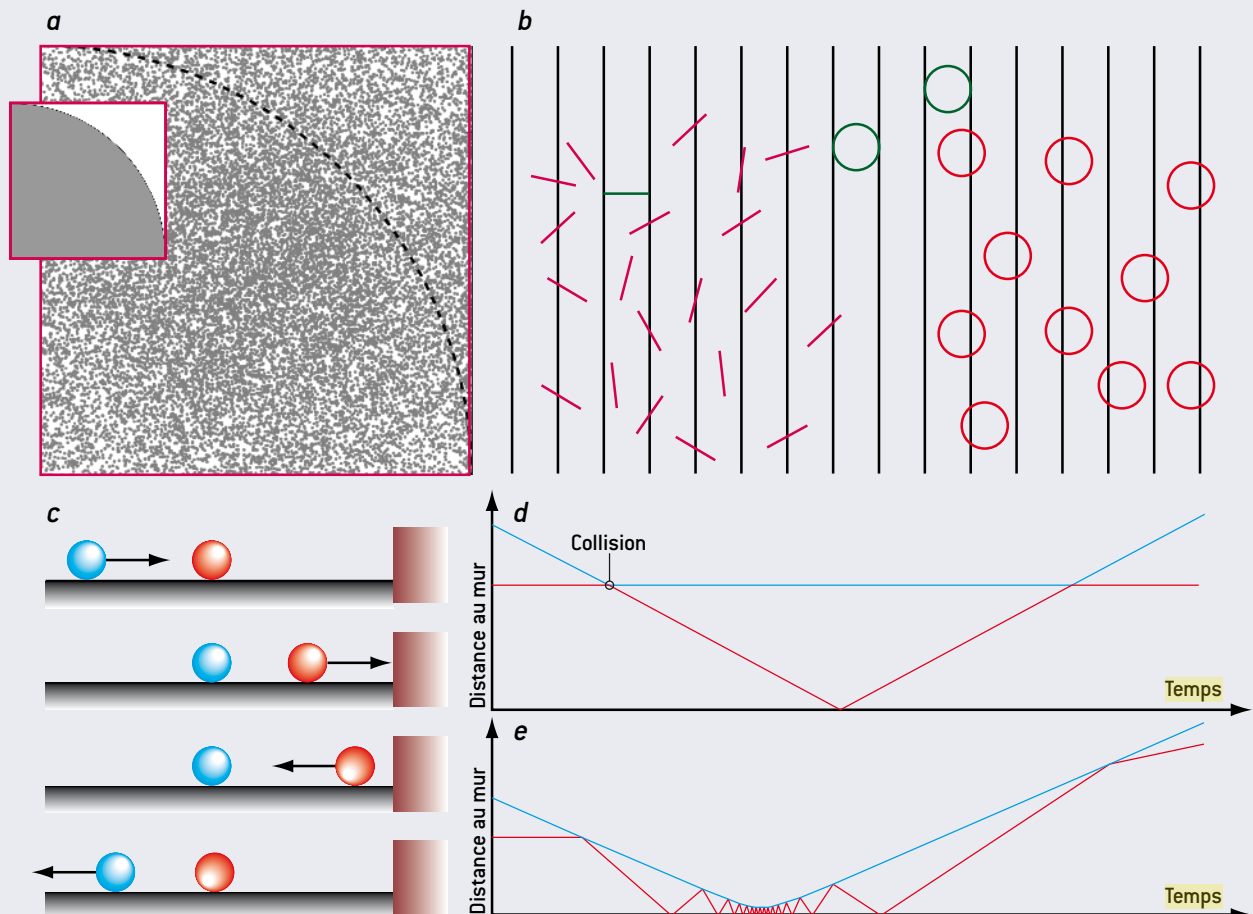
Si la répartition des points n'est pas uniforme, la méthode ne marche plus : il faut opérer un ajustement statistique. Vincent Dumoulin et Félix Thouin, plutôt que des grains de sable, ont tiré au fusil sur une cible. Le résultat de ce calcul agressif de π est 3,131.

Une deuxième méthode (b) est la méthode du naturaliste Buffon. Si on lance une aiguille aléatoirement sur un tracé constitué de droites parallèles espacées de la longueur L d'une aiguille, la probabilité

de l'intersection d'une aiguille avec une droite est $2/\pi$: en lançant beaucoup d'aiguilles et en comptant la proportion d'intersections, on en tire une approximation de π . Afin de comprendre cela, supposons que, en moyenne, le nombre de points d'intersection d'une courbe quelconque avec les droites soit proportionnel à sa longueur. Pour un cercle de diamètre L , ce nombre est toujours égal à 2 ; alors le nombre de points d'intersection pour l'aiguille sera en moyenne $2L/\pi L = 2/\pi$.

Une troisième méthode exploite les chocs entre billes. Prenons une bille bleue et une bille rouge de même masse (c). La bille rouge est immobile. La bille bleue la frappe selon un choc élastique. La bille bleue s'immobilise et la bille rouge se trouve précipitée sur un mur où elle rebondit et repart vers la bille bleue. Après le choc, la bille rouge est à nouveau immobile et la bille bleue s'éloigne indéfiniment. Il y a eu 3 chocs : 3 est le premier chiffre de π (d).

Si les masses sont dans un rapport 100, au lieu de 3 chocs, il y en a 31 (e). Plus généralement, Gregory Galperin a prouvé que si le rapport des masses est 100^n , alors le nombre de chocs reste fini, et c'est l'entier correspondant aux $n+1$ premières décimales de π . Ainsi, pour $n = 5$, on aura 314159 chocs : ce sont les 6 premiers chiffres de π .

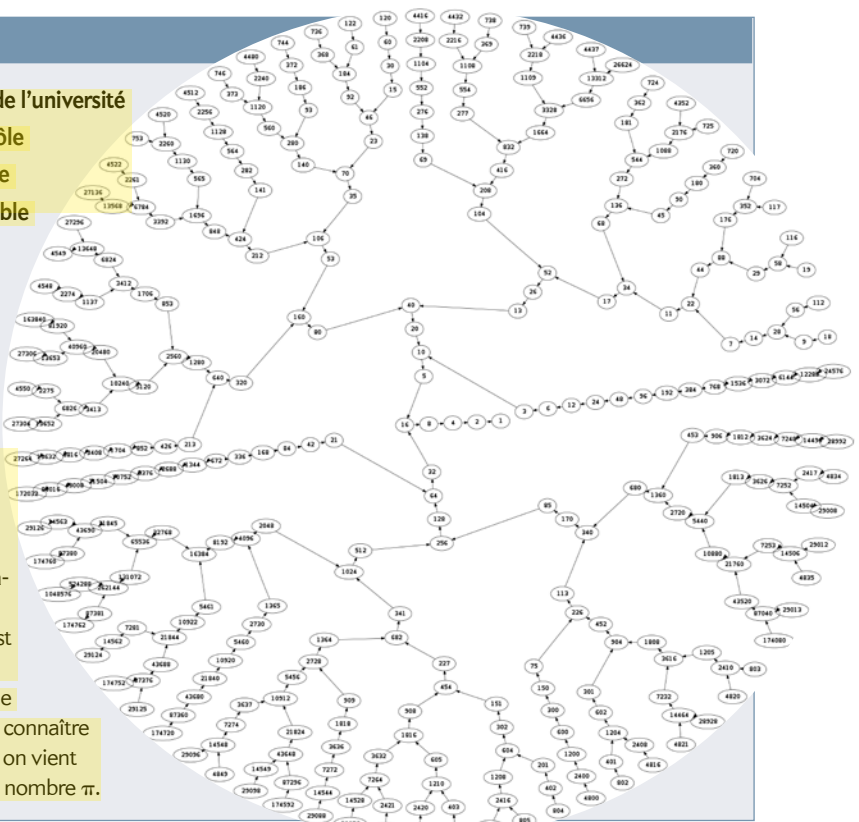


Syracuse et π

La conjecture de Syracuse, dont le nom provient de l'université de Syracuse, aux États-Unis, laquelle a joué un rôle important dans la popularisation de la conjecture éponyme, reste ouverte. Son énoncé est compréhensible par tous : « Quand on part d'un entier positif n quelconque et que, de manière répétée, on le divise par 2 s'il est pair et on le remplace par $3n + 1$ s'il est impair, on finit toujours par tomber sur 1. »

Les mathématiciens n'ont pas trouvé de contre-exemple, en dépit de recherches intensives sur ordinateur. La conjecture a occupé dans les années 1980 tant de mathématiciens que, dans l'ambiance de la guerre froide, on a émis l'hypothèse que c'était une arme soviétique destinée à occuper à cette fadaise les mathématiciens américaines. L'image ci-contre figure l'arbre reliant les nombres dont la longueur de la suite aboutissant à 1 est inférieure à 20.

Archimède (de Syracuse) fut le premier à proposer une méthode de calcul mathématique de π permettant d'en connaître autant de décimales qu'on veut. Étonnante coïncidence, on vient de proposer un lien entre la conjecture de Syracuse et le nombre π .



peu que le dispositif matériel soit exactement conforme au modèle théorique.

Pour comprendre cette méthode, commençons par le cas le plus simple. On considère deux billes A et B de même masse exactement (en fait, des masses ponctuelles, la rondeur des billes ne joue aucun rôle). La bille A est immobile à une distance L d'un mur plat M. On lance la bille B perpendiculairement au mur M dans la direction de A. Elle cogne la bille A de façon parfaitement élastique (conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement). La bille B s'immobilise donc, et A part vers le mur M avec la vitesse qu'avait B et qu'elle lui a transmise. La bille A cogne le mur. On suppose à nouveau que le choc est parfaitement élastique. Elle rebondit, et repart vers B, toujours avec la même vitesse. La bille A cogne B, A s'immobilise et B repart en s'éloignant du mur indéfiniment. On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Il y a eu trois chocs : deux entre les billes A et B et un entre la bille A et le mur. Le chiffre 3 est le premier de π . Ce n'est pas un hasard !

Si maintenant on refait l'expérience avec une bille B dont la masse est 100 fois celle

de A (toujours en supposant des chocs parfaitement élastiques), le schéma des collisions est plus compliqué. Avant que B et A ne se séparent définitivement, le nombre de chocs entre A et B et de la bille A avec le mur est 31. Ce sont les deux premiers chiffres décimaux de π . Plus généralement, si le rapport des masses entre B et A est 10^{2n} , alors le nombre de chocs donnera exactement les $n + 1$ premiers chiffres décimaux de π . Ainsi, pour un rapport de masse de 10 000, il y a 314 chocs ; pour un rapport 1 000 000, il y a 3 141 chocs ; etc.

Une belle méthode, mais sans intérêt pratique

Pour les premières valeurs de n , on peut écrire de petits programmes qui confirment les affirmations indiquées. Le résultat général est cependant démontré de manière parfaitement rigoureuse (voir la bibliographie). Il nécessite juste une petite hypothèse : les $2n$ premiers chiffres de π ne doivent pas se terminer par $n - 1$ fois le chiffre 9. On sait que c'est vrai pour n plus petit que

6 650 000 000 000, puisqu'on connaît explicitement les décimales de π , mais pour n tendant vers l'infini, nul ne sait le démontrer. Cette propriété est jugée plus que probable, mais elle reste inaccessible à nos techniques de preuve.

La méthode est magnifique et a étonné les spécialistes des systèmes dynamiques, qui n'imaginaient pas que π soit présent dans des dispositifs aussi élémentaires.

Sur le plan pratique, la méthode est cependant d'un intérêt limité. Comment ajuster les masses de A et de B avec la précision exigée ? On ne peut espérer faire beaucoup plus que le nombre d'Avogadro, soit environ 10^{24} , ce qui ne donnera que 12 décimales, et les autres mesures sont à l'avenant. Comment être certain de lancer les billes perpendiculairement au mur avec toute l'exactitude nécessaire ? Comment s'assurer que les chocs soient parfaitement élastiques et qu'il n'y ait aucun frottement ?

Pas plus que la méthode de Buffon ou du fusil, dont on ne tire jamais plus de quatre décimales de π , on ne tirera pas de celle de Galperin un grand nombre de chiffres