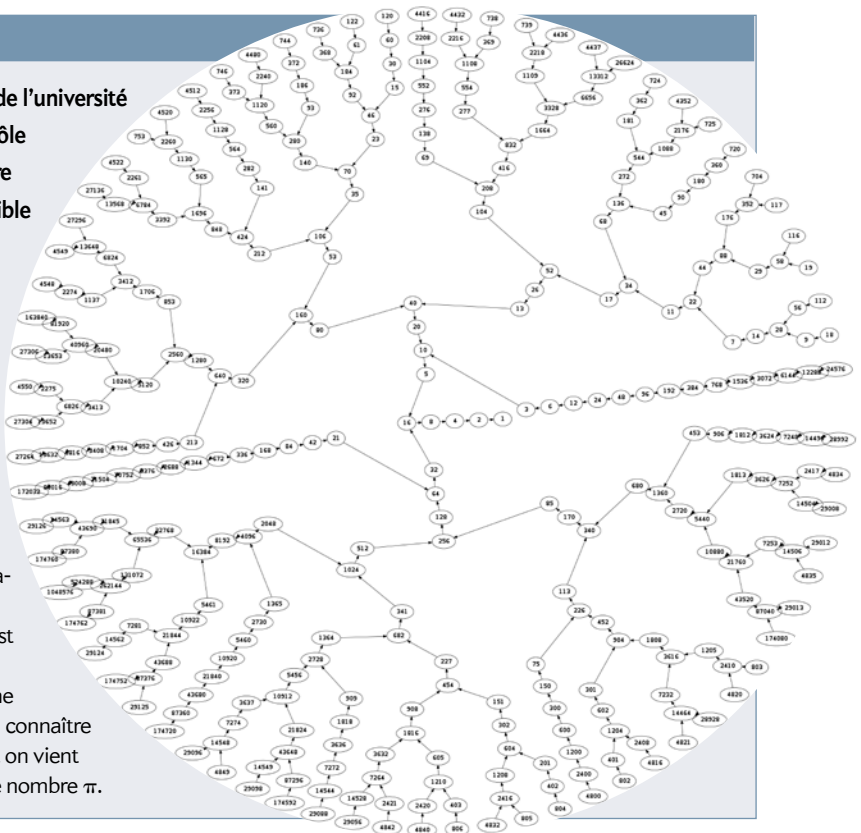


Syracuse et π

La conjecture de Syracuse, dont le nom provient de l'université de Syracuse, aux États-Unis, laquelle a joué un rôle important dans la popularisation de la conjecture éponyme, reste ouverte. Son énoncé est compréhensible par tous : « Quand on part d'un entier positif n quelconque et que, de manière répétée, on le divise par 2 s'il est pair et on le remplace par $3n + 1$ s'il est impair, on finit toujours par tomber sur 1. »

Les mathématiciens n'ont pas trouvé de contre-exemple, en dépit de recherches intensives sur ordinateur. La conjecture a occupé dans les années 1980 tant de mathématiciens que, dans l'ambiance de la guerre froide, on a émis l'hypothèse que c'était une arme soviétique destinée à occuper à cette fadaise les mathématiciens américaines. L'image ci-contre figure l'arbre reliant les nombres dont la longueur de la suite aboutissant à 1 est inférieure à 20.

Archimède (de Syracuse) fut le premier à proposer une méthode de calcul mathématique de π permettant d'en connaître autant de décimales qu'on veut. Étonnante coïncidence, on vient de proposer un lien entre la conjecture de Syracuse et le nombre π .



peu que le dispositif matériel soit exactement conforme au modèle théorique.

Pour comprendre cette méthode, commençons par le cas le plus simple. On considère deux billes A et B de même masse exactement (en fait, des masses ponctuelles, la rondeur des billes ne joue aucun rôle). La bille A est immobile à une distance L d'un mur plat M. On lance la bille B perpendiculairement au mur M dans la direction de A. Elle cogne la bille A de façon parfaitement élastique (conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement). La bille B s'immobilise donc, et A part vers le mur M avec la vitesse qu'avait B et qu'elle lui a transmise. La bille A cogne le mur. On suppose à nouveau que le choc est parfaitement élastique. Elle rebondit, et repart vers B, toujours avec la même vitesse. La bille A cogne B, A s'immobilise et B repart en s'éloignant du mur indéfiniment. On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Il y a eu trois chocs : deux entre les billes A et B et un entre la bille A et le mur. Le chiffre 3 est le premier de π . Ce n'est pas un hasard !

Si maintenant on refait l'expérience avec une bille B dont la masse est 100 fois celle

de A (toujours en supposant des chocs parfaitement élastiques), le schéma des collisions est plus compliqué. Avant que B et A ne se séparent définitivement, le nombre de chocs entre A et B et de la bille A avec le mur est 31. Ce sont les deux premiers chiffres décimaux de π . Plus généralement, si le rapport des masses entre B et A est 10^{2n} , alors le nombre de chocs donnera exactement les $n + 1$ premiers chiffres décimaux de π . Ainsi, pour un rapport de masse de 10 000, il y a 314 chocs ; pour un rapport 1 000 000, il y a 3 141 chocs ; etc.

Une belle méthode, mais sans intérêt pratique

Pour les premières valeurs de n , on peut écrire de petits programmes qui confirment les affirmations indiquées. Le résultat général est cependant démontré de manière parfaitement rigoureuse (voir la bibliographie). Il nécessite juste une petite hypothèse : les $2n$ premiers chiffres de π ne doivent pas se terminer par $n - 1$ fois le chiffre 9. On sait que c'est vrai pour n plus petit que

6 650 000 000 000, puisqu'on connaît explicitement les décimales de π , mais pour n tendant vers l'infini, nul ne sait le démontrer. Cette propriété est jugée plus que probable, mais elle reste inaccessible à nos techniques de preuve.

La méthode est magnifique et a étonné les spécialistes des systèmes dynamiques, qui n'imaginaient pas que π soit présent dans des dispositifs aussi élémentaires.

Sur le plan pratique, la méthode est cependant d'un intérêt limité. Comment ajuster les masses de A et de B avec la précision exigée ? On ne peut espérer faire beaucoup plus que le nombre d'Avogadro, soit environ 10^{24} , ce qui ne donnera que 12 décimales, et les autres mesures sont à l'avenant. Comment être certain de lancer les billes perpendiculairement au mur avec toute l'exactitude nécessaire ? Comment s'assurer que les chocs soient parfaitement élastiques et qu'il n'y ait aucun frottement ?

Pas plus que la méthode de Buffon ou du fusil, dont on ne tire jamais plus de quatre décimales de π , on ne tirera pas de celle de Galperin un grand nombre de chiffres