

de π . Si l'on veut s'en tenir à des méthodes physiques, le mieux est peut-être simplement de mesurer avec soin le périmètre et le diamètre d'un cercle assez grand et de faire le quotient. En réalité, rien ne vaut les calculs purs ne s'appuyant pas sur des hypothèses et des mesures physiques qu'on ne parvient jamais à mener avec plus de quelques chiffres significatifs. Venons-en donc aux méthodes mathématiques.

Nombre d'Archimède et conjecture de Syracuse

Le nombre π , dont Archimède a été le premier à proposer une méthode mathématique permettant d'en calculer les chiffres aussi loin qu'on le souhaite, porte parfois le nom de constante d'Archimède. Archimède est né, a vécu et est mort à Syracuse, en Sicile. En mathématiques, Syracuse est aussi le nom d'une conjecture qui intéresse beaucoup de monde à cause de sa simplicité.

Décrivons cette « conjecture de Syracuse » ou « conjecture de Collatz ». On part d'un entier positif quelconque n ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le remplace par $3n + 1$. Et on recommence. Par

exemple, de $n = 13$ on passe à 40, puis à 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2 et enfin 1. La conjecture affirme que quel que soit l'entier initial n , on finit toujours par arriver à 1. Personne n'a su la démontrer. Expérimentalement, elle a été vérifiée jusqu'à $2^{60} = 1,15 \times 10^{18}$. *A priori*, elle n'a rien à voir avec π , malgré son nom qui semble établir un lien avec Archimède. La Syracuse qui intervient dans le nom de la conjecture est en fait la ville américaine de Syracuse, dans l'État de New York, dont l'université a été une étape importante dans la diffusion de la conjecture au monde entier.

Une question naturelle se pose cependant : si π est vraiment partout, n'existe-t-il pas un moyen de le calculer à partir de la conjecture de Syracuse ? La réponse est oui. Le Français Roland Yéléhada a en effet mis au point une méthode de calcul de π à partir de la conjecture de Syracuse.

Le principe est le suivant. On calcule la suite de Syracuse pour tous les nombres jusqu'à une certaine borne n , par exemple 100. Pour chacune des suites calculées, par exemple [13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], on évalue la longueur, ici 10, et la somme des éléments de la suite, ici 119. On teste si les deux nombres obtenus ont un diviseur

commun plus grand que 1 ; ce n'est ici pas le cas. On prend alors le nombre a de fois où la réponse a été NON, puis on divise a par n , ce qui donne un nombre b . On calcule enfin la racine carrée de $6/b = c$. Ce nombre c est une valeur approchée de π .

La méthode ne donne pas très rapidement les chiffres de π , mais on a des raisons de croire qu'elle converge vers π , car la longueur et la somme d'une suite de Syracuse, à cause de comportements imprévisibles des suites, sont comme deux nombres entiers tirés au hasard. Or on sait, d'après un résultat de 1881 démontré par Ernesto Cesaro, que la probabilité que deux entiers tirés au hasard n'aient pas de diviseur commun supérieur à 1 est $6/\pi^2$. Bien qu'aujourd'hui aucune preuve mathématique rigoureuse n'ait été donnée du résultat quand n tend vers l'infini, les expériences effectuées en écrivant de petits programmes confirment qu'il s'agit bien d'une méthode de calcul de π . Pour $n = 100$, on obtient $a = 66$, $b = 0,66$, $c = 3,01511...$ Pour $n = 1\,000$, on obtient $a = 606$, $b = 0,606$, $c = 3,146583...$

Bien évidemment, il s'agit d'un jeu et pour disposer de beaucoup de décimales de π , ce procédé n'est pas à recommander,

L'ensemble de Mandelbrot et π

On part d'un point c (marqué en rouge) de coordonnées $(-3/4, 1/10^k)$ et on applique la règle $c_{n+1} = c_n^2 + c$ jusqu'à sortir du disque de rayon 2. Les coordonnées du « carré » c^2 du point $c = (a, b)$ sont, par définition, $(a^2 - b^2, 2ab)$.

Le nombre d'étapes nécessaires est 3 pour $k = 0$; 33 pour $k = 1$; 315 pour $k = 2$; 3143 pour $k = 3$; 31417 pour $k = 4$; 314160 pour $k = 5$; 3141593 pour $k = 6$. On reconnaît (à l'exception des derniers chiffres) le développement décimal de π . La preuve précise que ces calculs des chiffres de π se poursuivent jusqu'à l'infini n'a été donnée qu'en 2001, par Aaron Klebanoff aux États-Unis : π est caché de manière inattendue dans l'ensemble fractal de Mandelbrot, qui est l'ensemble des points c ne s'échappant pas à l'infini.

